

Treningsoppgave Midtsemesterprøve MA1101

Denne er klippet sammen fra et par andre prøver.

DEL I

Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål i del I. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke “straffet” for å gjette. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

1. Det reelle tallet $\frac{\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} - \frac{1}{2}$ er

☐ et irrasjonalt tall ☐ 0 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ et rasjonalt tall ☐ ingen av delene

2. For funksjonen $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, finnes et tall $c \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ som oppfyller konklusjonen i middelverdisetningen, nemlig c lik

☐ $2\pi/3$ ☐ $3\pi/4$ ☐ $5\pi/6$ ☐ π ☐ $3\pi/2$

3. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$ er lik

☐ $1/2$ ☐ $-1/2$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ eksisterer ikke

4. Grenseverdien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos x}$ er lik

☐ 4 ☐ ∞ ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1

5. Anta at $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon. Vi ser på utsagnene

I. f er diskontinuerlig.

II. f er begrenset.

III. Hvis $a < a_1 < b_1 < b$ og $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, så finnes et tall $c \in (a_1, b_1)$ slik at $f(c) = 0$.

Da gjelder alltid

☐ I og II ☐ II og III ☐ I og III ☐ II ☐ III

6. En sylinder med høyde h og radius r er slik at $h + 2\pi r = 1$ meter. For hvilken r har sylinderen størst volum?

☐ $\frac{1}{3\pi}$ cm ☐ $\frac{50}{\pi}$ cm ☐ 2π cm ☐ $\frac{50}{3\pi}$ cm ☐ $\frac{1}{3\pi}$ m

7. La $a_n = n \sin(\frac{1}{n}) + (-1)^n \frac{\cos n}{n}$ for $n \geq 1$. Følgen $\{a_n\}$ er da:

☐ Begrenset, men ikke konvergent
☐ Konvergent med grenseverdi 1
☐ Konvergent med en negativ grenseverdi
☐ Divergent med grenseverdi ∞
☐ Konvergent med grenseverdi 0

DEL II

Her skal du begrunne svaret ditt, og ta med alle nødvendige mellomregninger.

8. La

$$g(x) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x^2}\right), & \text{hvis } x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \\ 0, & \text{hvis } x = 0. \end{cases}$$

a) Finn $g'(x)$ når $x \neq 0$.

b) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x).$$

Er funksjonen g kontinuerlig i $x = 0$? Begrunn svaret.

c) Bruk definisjonen av den deriverte til å vise at g ikke er deriverbar i $x = 0$. (Hint: Du kan bruke at $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x^2})$ ikke finnes.)