Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Lisa Lorentzen 73 59 35 48
Kristian Seip 73 59 35 16
Ivar Amdal 73 59 34 68

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Bokmål
Onsdag 10. desember 2003
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12. januar

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1
Bestem grenseverdiene

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \quad \text{og} \quad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

Oppgave 2
Løs initialverdiproblemet

$$y' = -2x(y-1), \quad y(0) = 2.$$

Oppgave 3
Finn ligningen til tangenten i punktet $(1,1)$ til kurven

$$x^2y + xy^3 = 2.$$

Oppgave 4
Bestem arealet til rotasjonsflaten som fremkommer når kurven

$$y = \cosh x, \quad 0 \leq x \leq \ln 2,$$

dreies om linjen $x = -1$.

Oppgave 5
Funksjonen F er definert ved

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{-\sin t}\, dt.$$

Finn Taylorpolynomet av grad 2 for F om punktet $x = 0$.

Oppgave 6

a) Finn konvergensradien til potensrekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n}}$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

b) La S betegne summen av rekken i punkt **a)** når $x = -1/2$. Finn en tilnærmet verdi L for S slik at $|S - L| < 0.001$. Begrunn at den ønskede nøyaktigheten er oppnådd.

Oppgave 7

a) Begrunn at ligningen

$(*) \qquad e^x - x - 2 = 0$

har nøyaktig to løsninger.

b) Forklar hvorfor $x_0 = 0$ er uegnet som startverdi dersom $(*)$ skal løses ved hjelp av Newtons metode. Bruk så Newtons metode til å finne den største av de to løsningene av $(*)$ med to desimaler.

Oppgave 8
Et legeme har grunnflate i xy-planet. Grunnflatens omkrets er sirkelen $x^2 + y^2 = 1$, og alle tverrsnitt gjennom legemet vinkelrett på x-aksen er likesidede trekanter.

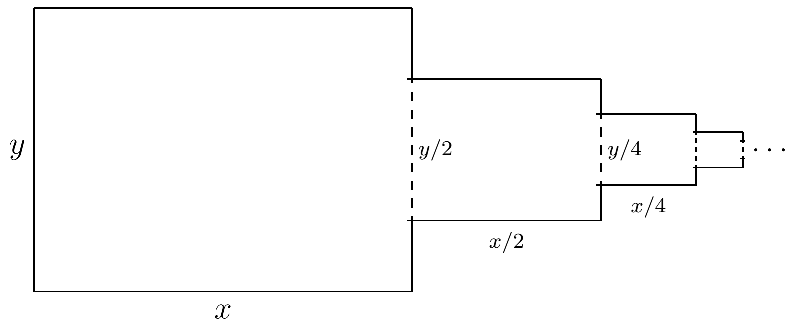
Finn volumet av legemet.

Oppgave 9

En innsjø har et volum på $8 \cdot 10^9$ m^3. Anta konsentrasjonen av et forurensende stoff er 2.5 kg/m^3 ved tidspunktet $t = 0$. En elv tilfører innsjøen vann som inneholder 0.5 kg/m^3 av det forurensende stoffet. Vannet fra elven strømmer med konstant hastighet $5 \cdot 10^8$ m^3 pr. dag inn i innsjøen. En annen elv fjerner hver dag $5 \cdot 10^8$ m^3 vann fra innsjøen. Vi antar at vannet i innsjøen til enhver tid er perfekt blandet. Når vil konsentrasjonen av det forurensende stoffet i innsjøen være redusert til 1 kg/m^3?

Oppgave 10

Med utgangspunkt i et rektangel med sidekanter x og y lages et område som antydet i nedenstående figur.



Det vil si at en uendelig sekvens av rektangler "hektes" på hverandre, slik at vi ved hver "påhekting" halverer sidekantene i foregående rektangel.

Omkretsen av området skal være 6. Hva må x og y være for at området skal ha maksimalt areal?