Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1, 10. DESEMBER 2003

Oppgave 1

(i) Vi har et "0/0"-uttrykk og kan derfor forsøke L'Hôpitals regel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'Hôp}}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2e^0}{\cos 0} = \underline{\underline{2}}.$$

(ii) Vi omformer uttrykket til et "0/0"-uttrykk:

$$\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} = \frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)}.$$

Vi kan dermed bruke L'Hôpitals regel eller eventuelt rekkeutvikle teller og nevner (vi gjør det siste):

$$\frac{x-\ln(x+1)}{x\ln(x+1)} = \frac{x - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \cdots} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \cdots}{1 - \frac{x}{2} + \cdots}.$$

Dermed:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Oppgave 2

Vi skal løse

$$y' = -2x(y-1),\ \ y(0) = 2.$$

Vi observerer at dette er en separabel førsteordens differensialligning:

$$\frac{1}{y-1}y' = -2x.$$

Vi får dermed $\displaystyle\int \frac{dy}{y-1} = -\int 2x\ dx$, som gir $\ln|y-1| = -x^2 + c$, eller $y = ke^{-x^2} + 1$.

$y(0) = 2$ gir $k = 1$, altså

$$\underline{\underline{y = e^{-x^2} + 1}}.$$

Oppgave 3
Vi kan anta at ligningen

$$x^2y + xy^3 = 2$$

definerer y som funksjon av x i nærheten av punktet $(1,1)$. Vi deriverer implisitt:

$$2xy + x^2y' + y^3 + x3y^2 \cdot y' = 0.$$

Setter vi inn $x = y = 1$, får vi $2 + y' + 1 + 3y' = 0$, dvs. $y' = -\dfrac{3}{4}$.

Dermed får tangenten i punktet $(1,1)$ ligning $\dfrac{y-1}{x-1} = -\dfrac{3}{4}$, eller $\underline{\underline{y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{7}{4}}}$.

Oppgave 4
Vi får

$$dA = 2\pi r\,ds = 2\pi(x+1)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Siden $\dfrac{dy}{dx} = \sinh x$ og $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, fås for arealet A av rotasjonsflaten

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\ln 2} 2\pi(x+1)\cosh x\,dx \\
&= 2\pi\left[(x+1)\sinh x - \cosh x\right]_0^{\ln 2} \\
&= 2\pi\left[(\ln 2 + 1)\cdot\frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) + 1\right] \\
&= \underline{\underline{\frac{\pi}{2}(3\ln 2 + 2).}}
\end{aligned}$$

Oppgave 5
Gitt $F(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-\sin t}dt$. Vi har ved analysens fundamentalteorem og kjerneregelen

$$F'(x) = 2x \cdot e^{-\sin x^2}.$$

Videre fås

$$F''(x) = 2e^{-\sin x^2} + 2x \cdot (-2x\cos x^2)e^{-\sin x^2}.$$

Dermed $F(0) = F'(0) = 0$ og $F''(0) = 2$ slik at

$$\underline{\underline{P_2(x) = x^2}}.$$

Oppgave 6

a) Med $a_n = \dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n}}$ fås

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{2}.$$

Ved forholdstesten er derfor konvergensradien 2. $x = 2$ gir rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

som er en divergent p-rekke ($p = \frac{1}{2} \le 1$). Alternativt kan dette sjekkes ved integraltest.

$x = -2$ gir den alternerende rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$$

som konvergerer fordi $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ går monotont mot 0 når $n \to \infty$.

b) La S betegne summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Siden $\dfrac{1}{4^n}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ går monotont mot 0, har vi

$$S - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^{N+1}E_N,$$

med $0 \le E_N \le \dfrac{1}{4^{N+1}\sqrt{N+1}}$.

Siden $\dfrac{1}{4^4\sqrt{4}} = \dfrac{1}{512} \approx 0.00195$, kan vi sette

$$L = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{512} \approx \underline{\underline{-0.21385}}$$

med en feil mindre enn 0.00098. Alternativt kan vi finne at

$$\frac{1}{4^5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.00044$$

som er feilskranken om man setter

$$L = -\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{64\cdot\sqrt{3}} + \frac{1}{512} \approx \underline{\underline{-0.21287}}.$$

Oppgave 7

a) Sett $f(x) = e^x - x - 2$.

Vi har

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}.$$

Videre har vi $f(0) = -1$. Vi splitter i to tilfeller:

1. Når $x \leq 0$, er f strengt avtagende (siden $f'(x) < 0$ for $x < 0$), og vi kan derfor ha høyst én løsning av $f(x) = 0$. Siden $f(-2) = e^{-2} > 0$ og $f(0) = -1 < 0$, gir skjæringssetningen at vi har en løsning i intervallet $(-2, 0)$.
2. Når $x \geq 0$, er f strengt voksende (siden $f'(x) > 0$ for $x > 0$), og vi kan derfor ha høyst én løsning av $f(x) = 0$. Siden $f(0) = -1 < 0$ og $f(2) = e^2 - 4 > 0$, gir skjæringssetningen at vi har en løsning i intervallet $(0, 2)$.

b) Newtons metode gir

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{x_n e^{x_n} - e^{x_n} + 2}{e^{x_n} - 1}.$$

$x_0 = 0$ er uegnet fordi vi har $f'(0) = 0$, som gir 0 i nevneren.

Vi setter $x_0 = 1$ og får

x_0	1
x_1	1.16395
x_2	1.14642
x_3	1.14619

Dermed blir svaret $\underline{\underline{1.15}}$.

Oppgave 8

Ved skivemetoden er $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} A(x)dx$, hvor

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\, s = \sqrt{3}\, y^2 = \sqrt{3}\,(1 - x^2).$$

Altså: $V = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)dx = 2\sqrt{3}\,(1 - \frac{1}{3}) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3}}}$.

Oppgave 9

Sett $y(t) =$ konsentrasjon av forurensning ved tid t (kg/m^3). Vi får følgende differensialligning:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{0.5 \cdot 5 \cdot 10^8 - y \cdot 5 \cdot 10^8}{8 \cdot 10^9} = \frac{1}{16}(0.5 - y)$$

med initialverdi $y(0) = 2.5$. (Tidsenhet er dager.) Vi løser differensialligningen og får $y = ke^{-\frac{t}{16}} + 0.5$, dvs.

$$y = 2e^{-\frac{t}{16}} + 0.5$$

fordi $y(0) = 2.5$. Vi har $y = 1$ når $e^{-\frac{t}{16}} = \frac{1}{4}$, altså når

$$t = 16 \ln 4 = \underline{\underline{32 \ln 2 \approx 22.18 \text{ dager}}}.$$

Oppgave 10

Vi finner at

- Omkretsen L av området er

$$\begin{aligned} L &= y + 2x + \frac{1}{2}(y + 2x) + \frac{1}{4}(y + 2x) + \cdots \\ &= (y + 2x) \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2(y + 2x). \end{aligned}$$

- Arealet A av området er

$$A = xy + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{16}xy + \cdots = xy \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^n = \frac{4}{3}xy.$$

$L = 6$ gir $y = 3 - 2x$ og altså

$$A(x) = \frac{4}{3}(3x - 2x^2) = \frac{4}{3}\left(\frac{9}{8} - 2(x - \frac{3}{4})^2\right),$$

dvs. $x = \frac{3}{4}$ og dermed $y = \frac{3}{2}$ gir maksimalt areal. (Maksimalt areal blir $\frac{3}{2}$.)