TMA4100 Matematikk 1
eksamen 02.08.04

Løsningsforslag

1 Ved å bruke L'Hôpitals regel for "0/0"-uttrykk i overgangene merket $(*)$ får vi

(i) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{2}=\frac{3}{2},$$

(ii) $$\lim_{x\to\infty} x\left(e^{1/x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}-1}{1/x}=\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t-1}{t}\overset{(*)}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{e^t}{1}=1.$$

2 **a)** Differensialligningen er separabel og kan (for $y\neq 0$) skrives

$$\frac{1}{y^2}y'=\frac{1}{x^2+1}.$$

Ved integrasjon får vi

$$-\frac{1}{y}=\arctan x+C.$$

Av initialbetingelsen $y(0)=1$ får vi $C=-1-\arctan 0=-1$. Løsningen er følgelig

$$y=\frac{1}{1-\arctan x},\qquad x<\frac{\pi}{4}.$$

b) Karakteristisk ligning er $r^2-2r-8=0$ med røtter $r_1=4$ og $r_2=-2$. Generell løsning av differensialligningen blir

$$y=Ae^{4x}+Be^{-2x}.$$

Da er $y'=4Ae^{4x}-2Be^{-2x}$, og av initialbetingelsene $y(0)=3$ og $y'(0)=0$ får vi

$$\begin{aligned}A+B&=3\\4A-2B&=0.\end{aligned}$$

Herav følger $A=1$ og $B=2$, og løsningen blir

$$y=e^{4x}+2e^{-2x}.$$

3 Siden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}/\sqrt{n+1}\,|}{|x^n/\sqrt{n}\,|}=\lim_{n\to\infty}|x|\sqrt{\frac{n}{n+1}}=|x|,$$

er rekken $\sum_{n=1}^{\infty}x^n/\sqrt{n}$ absolutt konvergent når $|x|<1$ ifølge forholdstesten og divergent når $|x|>1$ ifølge divergenstesten. Konvergensradien er følgelig $R=1$.

Når $x=1$, får vi rekken $\sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n}$ som er en divergent p-rekke ($p=1/2\leq 1$).

Når $x=-1$, får vi den alternerende rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/\sqrt{n}$ som konvergerer fordi $1/\sqrt{n}$ går monotont mot 0 når $n\to\infty$.

4 **a)** Ved implisitt derivasjon med hensyn på x får vi

$$a + b\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right).$$

Løser vi denne ligningen mhp. dy/dx, får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a + axy - y}{b + bxy - x}.$$

Når $(x, y) = (0, 0)$ blir $dy/dx = -a/b$, tangenten i origo har følgelig ligning

$$y - 0 = -\frac{a}{b}(x - 0), \qquad \text{dvs.} \qquad ax + by = 0.$$

b) Setter vi $a = b = 1$ får vi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + xy - y}{1 + xy - x} = \frac{1 + xy - y}{x - xy - 1}.$$

I et punkt (x, y) på K der $dy/dx = 0$ er $1 + xy - y = 0$. Da er $y = 1/(1 - x)$ som innsatt i den gitte ligningen (med $a = b = 1$) gir

$$x + \frac{1}{1-x} = \ln\left(1 + \frac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1 - x).$$

Ligningen til bestemmelse av x kan følgelig skrives

$$f(x) = 0 \qquad \text{der} \qquad f(x) = x + \frac{1}{1-x} + \ln(1 - x).$$

Funksjonen f er definert for $x < 1$, og den er strengt voksende siden

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(1-x)^2}(-1) + \frac{1}{1-x}(-1) = \frac{x^2 - x + 1}{(1-x)^2} = \frac{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}{(1-x)^2} > 0.$$

Ligningen $f(x) = 0$ har følgelig høyst én løsning. Siden $f(-2) = -5/3 + \ln 3 < 0$ og $f(0) = 1 > 0$, har ligningen, ifølge skjæringssetningen, en løsning i intervallet $(-2, 0)$.

c) Vi skal finne løsningen $x = r$ av ligningen $f(x) = 0$ ved å bruke Newtons metode:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f(x) = x + \frac{1}{1-x} + \ln(1 - x), \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

Vi skal finne r med to desimaler, og bruker fire desimaler i mellomregningene.

n	x_n	$1 - x_n$	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$
0	-1.0000	2.0000	0.1932	0.7500	0.2575
1	-1.2575	2.2575	-0.0007	0.7530	-0.0009
2	-1.2566				

Med to desimaler er $x_1 = x_2$. Avrundet til 2 desimaler er følgelig $r = -1.26$.

5 Tiden T som mannen bruker fra A til B er gitt ved

$$T = \frac{20\theta}{6} + \frac{40\cos(\theta/2)}{3}, \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Ved derivasjon mhp. θ får vi

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{10}{3} - \frac{20\sin(\theta/2)}{3}.$$

Her er $dT/d\theta = 0$ når $\sin(\theta/2) = 1/2$, $\theta/2 = \pi/6$, $\theta = \pi/3$. Minimumsverdien til T må da oppnås for $\theta = \pi/3$, eller for $\theta = 0$ eller $\theta = \pi$. Avrundet til 2 desimaler får vi

$$T(0) = \tfrac{40}{3} = 13.33, \quad T(\pi/3) = \tfrac{10}{9}\pi + \tfrac{20}{3}\sqrt{3} = 15.04, \quad T(\pi) = \tfrac{10}{3}\pi = 10.47.$$

Følgelig oppnås T_{min} for $\theta = \pi$, mannen bør løpe hele veien fra A til B.

$\boxed{6}$ Massen m av staven er gitt ved

$$m = \int_{*}^{**} dm = \int_1^3 \delta(x)\,dx = \int_1^3 \frac{2}{x(4-x)}\,dx.$$

Vi bruker delbrøkoppspalting

$$\frac{2}{x(4-x)} = \frac{-2}{x(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4},$$

og multipliserer med $x(x-4)$ for å bestemme A og B. Vi får $-2 = A(x-4) + Bx$ og $x = 0$ gir $A = 1/2$ mens $x = 4$ gir $B = -1/2$. Dermed er

$$m = \tfrac{1}{2}\Big[\ln|x| - \ln|x-4|\Big]_1^3 = \tfrac{1}{2}\big[(\ln 3 - \ln 1) - (\ln 1 - \ln 3)\big] = \ln 3 \quad [\text{kg}].$$

$\boxed{7}$ Ved skivemetoden kan volumet av rotasjonslegemet skrives

$$V = \int_0^{\pi/2} A(y)\,dy.$$

Tverrsnitt vinkelrett på y-aksen er sirkulære med radius x. Siden $y = \arcsin(x-1)$, er $x - 1 = \sin y$, $x = 1 + \sin y$. Dermed er

$$A(y) = \pi(1+\sin y)^2 = \pi(1 + 2\sin y + \sin^2 y) = \pi\left[1 + 2\sin y + \tfrac{1}{2}(1-\cos 2y)\right]$$

og volumet av rotasjonslegemet blir

$$V = \pi\int_0^{\pi/2}\left[1 + 2\sin y + \tfrac{1}{2}(1-\cos 2y)\right]dy = \pi\Big[\tfrac{3}{2}y - 2\cos y - \tfrac{1}{4}\sin 2y\Big]_0^{\pi/2} = \tfrac{3}{4}\pi^2 + 2\pi.$$

Vi kunne også ha brukt sylinderskallmetoden. Vi kan se på rotasjonslegemet som en sylinder med radius 2 og høyde $\pi/2$ minus rotasjonslegemet vi får når flatestykket *under* kurven $y = \arcsin(x-1)$ for $1 \le x \le 2$ (siden $0 = \arcsin 0$ og $\pi/2 = \arcsin 1$) dreies om y-aksen. Det gir

$$V = 2\pi^2 - \int_1^2 2\pi x \arcsin(x-1)\,dx.$$

Integralet kan vi finne ved å substituere $u = x - 1$ og bruke formlene 138 og 139 i Rottmann side 145 for $\int \arcsin u\,du$ og $\int u\arcsin u\,du$:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi^2 - 2\pi\int_0^1 (1+u)\arcsin u\,du = 2\pi^2 - 2\pi\int_0^1 (\arcsin u + u\arcsin u)\,du \\
&= 2\pi^2 - 2\pi\Big[\Big(u\arcsin u + \sqrt{1-u^2}\Big) + \Big(\tfrac{1}{4}(2u^2-1)\arcsin u + \tfrac{1}{4}u\sqrt{1-u^2}\Big)\Big]_0^1 \\
&= 2\pi^2 - 2\pi\left[\left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{8}\pi\right) - 1\right] = \tfrac{3}{4}\pi^2 + 2\pi.
\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ **a)** Vi har

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{for alle } x.$$

Setter vi $x = -t^2/2$, får vi

$$e^{-t^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!\,2^n} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!\,2^2} - \frac{t^6}{3!\,2^3} + - \cdots \qquad \text{for alle } t,$$

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!\,2^n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!\,2^n}$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!\,2^2} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!\,2^3} + - \cdots .$$

Rekkeutviklingen for $f(x)$ konvergerer for alle x siden rekken vi integrerer leddvis konvergerer for alle t.

b) Med $x = 1/2$ får vi

$$f(1/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2)^{2n+1}}{(2n+1)n!\,2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!\,2^{3n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2!\,2^7} - \frac{1}{7 \cdot 3!\,2^{10}} + \frac{1}{9 \cdot 4!\,2^{13}} - \frac{1}{11 \cdot 5!\,2^{16}} + - \cdots .$$

Rekken er alternerende, og leddenes absoluttverdi avtar mot 0. Siden $1/(7 \cdot 3!\,2^{10}) < 0.0001$, setter vi

$$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2!\,2^7} = 0.4799$$

(avrundet til fire desimaler). Da er $|f(1/2) - I| < 1/(7 \cdot 3!\,2^{10}) < 0.0001$ ifølge feilskranken i alternerende rekkers test.