Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Ivar Amdal tlf. 735 93468

EKSAMEN I TMA4100 MATEMATIKK 1

Tirsdag 16. august 2005
Kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottman: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 6. september

Alle svar skal begrunnes, og det må være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Bestem grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Oppgave 2

a) Løs initialverdiproblemet

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2 - k\right) y^2, \qquad y(0) = 1$$

der k er en gitt konstant.

b) For $k = -1$ kan løsningen i **a)** skrives

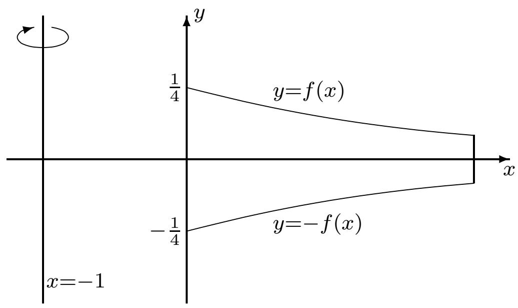
$$y = \frac{-3}{x^3 + 3x - 3}.$$

Det størst mulige definisjonsområdet for denne løsningen er et åpent intervall $(-\infty, a)$ der $a > 0$. Bruk Newtons metode til å bestemme a med to desimaler.

Oppgave 3 Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}.$$

La R betegne området i xy-planet begrenset av y-aksen, den rette linje $x = 2$ og kurvene $y = f(x)$ og $y = -f(x)$, se figuren til høyre.



a) Finn arealet A av området R.

b) Finn volumet V av rotasjonslegemet som dannes når R dreies om aksen $x = -1$. Bestem tyngdepunktet $(\overline{x}, \overline{y})$ til R?

Oppgave 4

a) En kurve K i xy-planet har ligning

$$(*) \qquad 2e^{2x} - e^y = x^2 y.$$

Vis at punktet $(0, \ln 2)$ ligger på K, og finn ligningen for tangenten til K i dette punktet.

b) Finn Taylorpolynomet av grad 2, $P_2(x)$, om $x = 0$ for funksjonen $y = f(x)$ som er definert implisitt ved ligningen $(*)$.

Oppgave 5

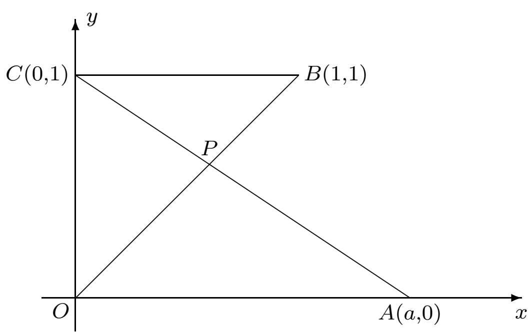
a) Bestem konvergensradien for potensrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{4n+1}},$$

og avgjør om rekken konvergerer i endepunktene av konvergensintervallet.

b) La S betegne summen av rekken i **a)** når $x = -1/4$. Finn en tilnærmet verdi L for S slik at $|S - L| \leq 10^{-3}$.

Oppgave 6 Gitt punktene $A(a, 0)$, $B(1, 1)$ og $C(0, 1)$ der $a > 0$. La P være skjæringspunktet mellom linjestykket fra origo O til B og linjestykket fra A til C, se figuren til høyre.



Bestem a slik at summen S av arealene av trekantene OAP og BCP blir minst mulig.