

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90849783

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:30

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler tillatt. Samarbeid er juks.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Samarbeid er juks. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 4

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☒

sort/hvit ☒ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Vi merker oss at integranden ikke er definert for $x = 0$, men

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

så vi kan fint bruke denne verdien som substitutt for $f(0)$, siden vi skal beregne et integral. Merk også at $f(\pi) = 0$, så denne trenger vi ikke ta med. Uttrykket for trapesregelen blir derfor

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin x_i}{x_i} \right)$$

og koden under produserer estimatet $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1.85193705196$.

```
import numpy as np

n=100000

h=np.pi/n

f=1

for i in range(n-1):

    x=(i+1)*np.pi/n

    f=f+2*np.sin(x)/x

print h*f/2
```

Oppgave 2 Siden

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

for alle $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, er f strengt voksende. Siden f er strengt voksende, er f injektiv, og følgelig eksisterer f^{-1} .

Oppgave 3

a) Vi bruker forholdstesten, og regner ut at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(-1)^n x^{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} \right| = x^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = x^2 < 1$$

dersom $|x| < 1$. Dette impliserer at rekken konvergerer for $|x| < 1$ og divergerer for $|x| > 1$. Vi sjekker endepunktene. For $x = 1$, får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

og for $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

som begge er konvergente rekker. Konvergensområdet er altså $|x| \leq 1$.

b) Det enkleste her, er å starte med geometrisk rekke:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

substituere $x = -s^2$:

$$\frac{1}{1+s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^{2n}$$

og så integrere hele greia fra 0 til x , og få

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Oppgave 4 Vi setter opp matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Vi velger nå $x_3 = s$. Dette gir videre at $x_2 = -2x_3 = -2s$, og $x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 + 4s - 3s = 1 + s$, slik at

$$\begin{bmatrix} 1+s \\ -2s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Siden likningssystemet har uendelig mange løsninger, må kolonnene være lineært avhengige.

Oppgave 5

a) Vi beregner

$$g'(t) = \frac{-12e^{2t}}{(3e^{2t} - 1)^2}$$

og

$$1 - g^2 = 1 - \left(\frac{3e^{2t} + 1}{3e^{2t} - 1} \right)^2 = \frac{(3e^{2t} - 1)^2 - (3e^{2t} + 1)^2}{(3e^{2t} - 1)^2} = \frac{-12e^{2t}}{(3e^{2t} - 1)^2}.$$

Siden disse er like, passer g i likningen. I tillegg er

$$g(0) = \frac{3e^{2 \cdot 0} + 1}{3e^{2 \cdot 0} - 1} = 2$$

så g er en løsning av problemet.

- b) Siden høyresiden $f(y) = 1 - y^2$ er kontinuerlig deriverbar overalt, må løsningen være entydig.

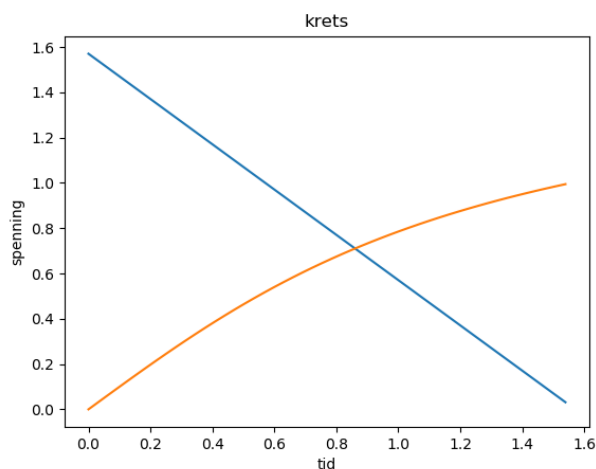
Oppgave 6 Vi kan bruke fikspunktiterasjonen, og skrive

$$x = g(x) = a \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

Siden

$$g'(x) = -\frac{a}{1+x^2},$$

og $1 \leq a \leq 1.1$, kan dette gå bra dersom løsningen er i nærheten av $x = 1$, som vi ser av plottet under:



Iterasjonen er implementert i kodesnutten under. De utkommenterte iterasjonene er Newtons metode og en fikspunktiterasjon som ikke konvergerer. Estimatet for løsningen blir $x = 0.865782737349$ når $a = 1.01$.

```
import numpy as np

n=100

a=1.01

x=1

for k in range(n):

    # x=x-(np.pi/2-np.arctan(x)-x/a)/(-1/(1+x**2)-1/a)

    x=a*(np.pi/2-np.arctan(x))

    # x=np.tan(np.pi/2-x/a)

print x
print np.pi/2-x/a-np.arctan(x)
```

Oppgave 7 Vi beregner

$$\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx = \pi \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi [\arctan x]_0^{\infty} = \pi \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Oppgave 8 Det enkleste her er å huske at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$