

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - TEST I - LF

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:30

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Alle hjelpemidler tillatt. Samarbeid er juks.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Denne oppgaven kan løses på mange måter. Observer først at

$$f'(x) = 2x - 2 > 0$$

når $x > 1$. Dette betyr at f er strengt voksende, og følgelig injektiv, på $[1, \infty)$. Vi kan derfor velge $A = [1, \infty)$, men vi kan også velge et intervall som er inneholdt i denne mengden, for eksempel $A = [1, 2]$, $A = [1, 3]$ eller $A = [2, 3]$. Alle fungerer like godt. Vi kan også observere at

$$f'(x) = 2x - 2 < 0$$

når $x < 1$, og se at for likeledes vil $A = [-3, -2]$ gjøre jobben.

For å finne f^{-1} må vi først velge en A . La oss ta $A = [-3, -2]$. Vi finner så funksjonsuttrykket for f^{-1} . Merk at $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Vi beregner

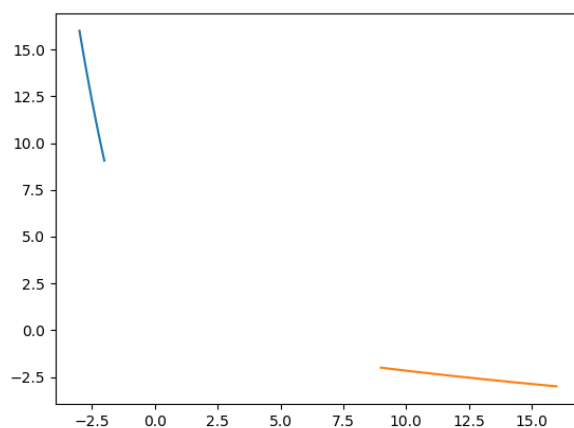
$$y = (x - 1)^2 \iff \pm\sqrt{y} = x - 1 \iff 1 \pm \sqrt{y} = x$$

Siden $x \in [-2, -3]$ og $\sqrt{y} \leq 0$, må vi velge

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}.$$

Definisjonsmengden til f^{-1} blir $[f(-2), f(-3)] = [9, 16]$.

For å oppsummere: Vi har at $f^{-1} : [9, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$. I plottet er f den blå biten, og f^{-1} den oransje.



Oppgave 2 Dersom vi ganger brøken oppe og nede med $1/n^2$, ser vi at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n^2}{1+n^2} \cdot \frac{1/n^2}{1/n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n^2 + 1}{1/n^2 + 1} = 1.$$

Dette er godt nok for eksamen, men jeg tar ϵ også for å illustrere hvordan det kan gjøres. Intuisjon og lang erfaring forteller oss at grenseverdien antagelig er 1. Vi velger $\epsilon > 0$, og ser at

$$\left| \frac{2+n^2}{1+n^2} - 1 \right| = \left| \frac{2+n^2}{1+n^2} - \frac{1+n^2}{1+n^2} \right| = \frac{1}{1+n^2} < \epsilon$$

dersom $n > \sqrt{\frac{1}{\epsilon} - 1}$.

Oppgave 3 La oss begynne med å skrive

$$f(x) = x^2 - e^x.$$

Dette er en kontinuerlig funksjon; se kapitlet om funksjoner på $\mathbb{R}$ i notatene. Vi kan observere at

$$f(0) = -1$$

og

$$f(-1) = 1 - 1/e > 0$$

og bruke skjæringssetningen, som sier at en kontinuerlig funksjon på intervallet $[-1, 0]$ må ta alle verdier mellom $f(-1)$ og $f(0)$. Siden $f(-1)$ og $f(0)$ har forskjellig fortegn, må det finnes en $c \in [-1, 0]$ slik at $f(c) = 0$.

Oppgave 4 Newtons metode leter etter nullpunkter til funksjoner, så la oss begynne med å skrive

$$f(x) = x^2 - e^x.$$

Vi vet fra forrige oppgave at denne funksjonen har et nullpunkt på intervallet $[-1, 0]$. Newtons metode er iterasjonen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - e^{x_n}}{2x_n - e^{x_n}},$$

og vi kan ta midtpunktet i intervallet som initialgjetning. Følgende pythonscript kjører hundre iterasjoner med newtons metode, og produserer $r \approx -0.703467422498$.

```
import numpy as np

x=-.5 #initialgjetning

for i in range(100):
    x=x-(x**2-np.exp(x))/(2*x-np.exp(x)) #newtoniterasjon
```

Oppgave 5 Vi har jo utledet et uttrykk for taylorrekken til $\ln(1+x)$ i forelesning, men jeg husker ikke dette uttrykket i farten, og derfor må jeg utlede det ved å integrere den geometriske rekken. Den kan jeg nemlig skrive opp i søvne, og beregningen blir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \implies \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Den siste rekken blir en konvergent alternerende rekke når $x = 1$, og vi ser at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Merk at rekkene for $\frac{1}{1-x}$ og $\frac{1}{1+x}$ ikke konvergerer for $x = 1$.

Denne oppgaven er ellers et greit bilde på livet, havet, døden, kjærligheten og aksiomatisk oppbygget matematikk. Et betimelig spørsmål når man skal utlede noe som andre mennesker skal lese, er hvor man skal begynne. Kanskje man husker at

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

og ønsker å begynne der. Det er helt greit. Kanskje man er som meg og ikke husker uttrykket, men må utlede det fra den geometriske rekken. Det er også greit. Kanskje man aldri har hørt om geometrisk rekke, men er et stort geni, og utleder denne på sparket ved å se at

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

og så la $n \rightarrow \infty$ og så ta det derfra. Dette er selvfølgelig også helt greit. Det viktigste er at du skriver nøyaktig hva du gjør, at det er logisk riktig, og at det svarer på spørsmålet som spørres etter.

Det jeg ønsker å sjekke med denne oppgaven, er om du kan litt om taylorrekker. Hvis du bare skriver at du har lest på wikipedia at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

er det ikke så lett å gi noe uttelling. Matematikk handler i bunn og grunn om resonnering og logikk. En tommelfingerregel er å ta med litt for mye heller enn litt for lite. **Komponer et lite opus og vis hva du kan!**

Oppgave 6 Vi gausseliminerer (her kan det finnes flere veier til Rom)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Av dette ser vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Likningssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 6z = 4 \end{cases}$$

kan også skrives

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

og ganger vi på hver side med den inverse matrisen, får vi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7 Vi vet jo at

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Det er lov å integrere denne ledd for ledd, slik at

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Merk at siden $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, er ikke dette et uegentlig integral. Vi kan estimere integralets numeriske verdi ved å summere opp et par ledd, for eksempel

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx \sum_{n=0}^2 \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}.$$

Det går an å skrive opp et pent og presist feilestimat siden dette er en alternerende rekke, men det har ikke vi hatt med i år. Se Adams kap. 9.4.

Oppgave 8 Volumet blir

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi 1 - \cos^2 x dx = \pi \int_0^\pi 1 - \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi 1 - \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Oppgave 9 Eulers eksplisitte metode blir

$$y_{n+1} = y_n - h\sqrt{y_n} \quad y_0 = 1.$$

Vi velger $h = 0.1$. Dette kan for eksempel gjøres slik:

```
import numpy as np

y=1
h=.1

for i in range(10):
    y=y-h*np.sqrt(y)
```

Oppgave 10 Velg $\epsilon > 0$. Siden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = L$$

kan vi finne N slik at $n > N$ impliserer

$$|f(n) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}.$$

Men dersom vi krever at $n > N$, ser vi at

$$|cf(n) - cL| = |c| \cdot |f(n) - L| \leq |c| \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon,$$

slik at

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cf(n) = cL.$$