

I forrige uke lærte vi å gange vektorer inn i matriser. Du kan egentlig tenke på en matrise som en funksjon som tar inn en vektor og gir ut en annen, for eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

For de fleste vektorer du ganger inn, får du noe random greier ut. Men nå skal vi se på noen vektorer som oppfører seg litt spesielt.

1 La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

og

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beregn Av og Aw . Ser du noe gøy?

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 \\ 2+12+4 \\ 2+4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Av = 9v$$

$$Aw = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ 36 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

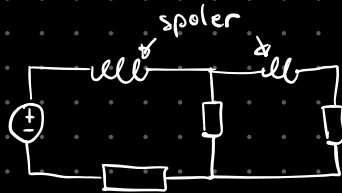
$$Aw = 9w$$

A matrise

\vec{v} **egenvektor** hvis det finnes et tall λ sãnn at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$\lambda =$ **egenverdien** til A tilhørende \vec{v}

Motivasjon:



Vektorene i forrige oppgave var såkalte egenvektorer til A . En egenvektor til A er en vektor v som tilfredsstiller likningen

$$Av = \lambda v$$

der λ er en skalar som kalles egenverdien til A tilhørende v .

2 Forklar at dersom du ønsker å beregne egenverdiene til A , bør du løse likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$B\vec{v} = \vec{0}$$

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

$A - \lambda I$ har ikke en invers hvis $\det(A - \lambda I) = 0$.

↳ polynom med λ som ukjent

⇒ egenverdiene til A er nullpunktene til polynomet $\det(A - \lambda I)$.

3 Finn alle egenverdier til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 6-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)((6-\lambda)^2 - 4) - 2(2(6-\lambda) - 4) + 2(4 - 2(6-\lambda))$$

= ...

$$= -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 13\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 13\lambda + 36) = -\lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9)$$

\Rightarrow egenverdier til A er $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9$

4 Forklar at dersom du ønsker å finne egenvektorene til A , bør du løse likningen

$$(A - \lambda I)x = 0$$

der λ er egenverdiene til A .

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

Merk: \uparrow må løses for hver egenverdi

5 Finn egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$$

$$\underline{\lambda_1 = 0}: A - \lambda_1 I = A \quad A\vec{v}_1 = \vec{0} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 4v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -4v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

$$\text{La } v_3 = t \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -4t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\underline{\lambda_2 = 4}: A - 4I = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \end{cases} \quad v_3 = t \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\underline{\lambda_2 = 9}: \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} 2v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases}$$

$$\text{La } v_1 = t \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

6 Finn egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7 La

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finn egenverdiene og egenvektorene, sett egenvektorene opp som kolonner i en matrise P , og beregn $P^{-1}AP$. Ser du noe gøy?

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$$

$$\underline{\lambda_1 = 2}: \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$$\underline{\lambda_2 = -1}: \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3$$

La $v_2 = s$ og $v_3 = t$ være frie variabler

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} s + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_3} t$$