Rekker (uendelige summer)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

e.g. $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots$

Når kan en uendelig sum gi et endelig tall?

1 Finn summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

(Dette lærte du på skolen.)

$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Geometrisk rekke: $\sum_{n=0}^{\infty} k^n$

hvis $|k| < 1$, så konvergerer og har da verdi $\frac{1}{1-k}$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, så $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{2}}$

2 Finn summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

(Hint: gang uttrykket over med k.)

3 Finn summen

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

2 $\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

$= -1 + 2 = \underline{\underline{1}}$

$\cdot$ Generelt: $k^a \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \sum_{n=0}^{\infty} k^a k^n = \sum_{n=0}^{\infty} k^{n+a} = k^a + k^{a+1} + k^{a+2} + \dots = \sum_{n=a}^{\infty} k^n$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{1}}$

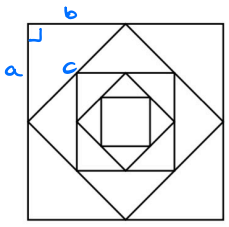
3 $\cdot \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{10}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{10}} \cdot 2 = \frac{1}{2^9} = \underline{\underline{\frac{1}{512}}}$

$\cdot$ Regn ut partialsummen $S_9 = \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{2^n} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - S_9$

Geometriske rekker kan brukes til mange artige ting.

4 Figuren viser de første fem av en uendelig følge av kvadrater. Finn summen av omkretsene av alle kvadratene.



$a^2+b^2=c^2$

$\Rightarrow c=\sqrt{a^2+b^2}$

1. kvadrat: omkrets $a=\frac{a}{\sqrt{2^0}}$ sidelengde $\frac{a}{4}$

2. kvadrat: sidelengde $=\sqrt{\left(\frac{a}{8}\right)^2+\left(\frac{a}{8}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{32}}=\frac{a}{4\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ omkrets $\frac{a}{\sqrt{2^1}}$

3. kvadrat: sidelengde $=\sqrt{\left(\frac{a}{8\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a}{8\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{a}{8}$ $\Rightarrow$ omkrets $\frac{a}{2}=\frac{a}{\sqrt{2^2}}$

⋮

N-te kvadratet: omkrets $\frac{a}{\sqrt{2^{N-1}}}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a}{\sqrt{2^n}}=a\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n=a\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{a}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{a(2+\sqrt{2})}{2-1}=\underline{\underline{a(2+\sqrt{2})}}$$

$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|<1$

5 Anta at en sprettball som slippes rett ned, spretter opp 3/4 av den opprinnelige høyden den ble sluppet fra. Anta at ballen kun beveger seg i vertikal retning. Hva er avstanden ballen vil bevege seg før den blir liggende stille når den slippes fra en høyde på 3 meter?

Generell høyde h

Ballen slippes $\Rightarrow h$

Etter 1. sprett $\Rightarrow 2\cdot\frac{3}{4}h$

" 2. " $\Rightarrow 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}h=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2h$

" 3. " $\Rightarrow 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2h=2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3h$

⋮

$\left|\frac{3}{4}\right|<1$

$$\Rightarrow h+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^nh=h-2h+2h\left(\frac{3}{4}\right)^0+2h\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n=-h+2h\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$=-h+2h\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=-h+2h\cdot4=7h$$

For høyde $h=3$: $7\cdot3=\underline{\underline{21}}$

To viktige rekker: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$ (divergerer) "den harmoniske rekken"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} < \infty \quad \text{(konvergerer)}$$

Nyttig test for å sjekke om en rekke konvergerer: **Sammenligningstesten**

La $a_n, b_n \geq 0$ og $a_n \leq b_n$ for alle n.
- hvis $\sum a_n$ divergerer, da divergerer $\sum b_n$ også
- hvis $\sum b_n$ konvergerer, da konvergerer $\sum a_n$ også

Idéen er at vi har $\sum a_n \leq \sum b_n$. Så hvis den minste rekka blir ∞, må jo også den store bli ∞, og hvis den store rekka har en endelig verdi, må også den mindre rekka ha endelig verdi.

6 Avgjør om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

er konvergent eller divergent.

7 Avgjør om

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

er konvergent eller divergent.

Vi kan bruke sammenligningstesten for å løse begge disse oppgavene.

6 For $n \geq 1$ har vi $\sqrt{n} \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer, må også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergere

7 For $n \geq 1$ har vi $n^2 \leq n^3 \Rightarrow \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer, må også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konvergere

Dagens nøtt

8 Vis at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

er konvergent og finn summen.

For $n \geq 1$ har vi $n(n+1) \geq n \cdot n = n^2$

$\Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$.

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer, gir sammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ også konvergerer.

For å finne summen bruker vi et par triks.

Først, bruk delbrøkoppspalting (gjør det selv) for å finne at $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Så skriver vi rett og skeft ut den N-te partialsummen til rekken:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

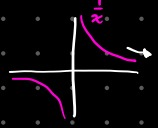
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}\right) + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)$$

Vi kan da se at $-\frac{1}{2}$ og $\frac{1}{2}$ kanselerer hverandre, og det gjør også $-\frac{1}{3}$ og $\frac{1}{3}$. Faktisk så blir bare alt null unntatt det første og det siste leddet, 1 og $-\frac{1}{N+1}$.

Så vi får $S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$. Vi finner da summen ved å la N gå mot ∞.

Når N er et uendelig stort tall, så kommer $\frac{1}{N+1}$ uendelig nært null.

(tenk på grafen til $\frac{1}{x}$. Når vi beveger oss lengre og lengre til høgre på x-aksen, så kommer grafen nærmere og nærmere $y=0$.)



Vi får altså $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$.

Denne rekken er et eksempel på en teleskoperende rekke (eng. telescoping series)

Dagens moro

Det burde være klart at en rekke ikke kan konvergere med mindre $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Eller?

9 Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + \cdots = -\frac{1}{12}.$$

(Hint: du må kanskje se her https://en.wikipedia.org/wiki/Ramanujan_summation.)

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n$ består av ledd som blir større og større, så det virker logisk at summen av uendelig mange store tall burde bli ∞. Og hvis du regner ut $S_N = \sum_{n=1}^{N} n$ og lar $N\to\infty$, så er det nettopp ∞ du burde få.

Men vi kan også prøve følgende:

La $S = 1+2+3+4+5+6+\ldots$

$\Rightarrow 4S = \quad 4 \quad +8 \quad +12+\ldots$ [gang med 4, tallene er skrevet spredt for å gjøre neste steg tydeligere]

$\Rightarrow S - 4S = 1-2+3-4+5-6+\ldots$ [rad 1 - rad 2]

$\Rightarrow -3S = \frac{1}{4}$ [vi får $1-2+3-4+\ldots = \frac{1}{4}$ på høyresiden pga et ligende argument]

$\Rightarrow S = -\frac{1}{12}$

Altså $\sum_{n=1}^{\infty} n = -\frac{1}{12}$.

Dette ser jo veldig rart ut. Samtidig så har vi jo bare brukt vanlige algebraiske teknikker og det ser ikke ut som vi har gjort noe ulovlig her.

Det som er problemet er at uendelige summer oppfører seg annerledes enn endelige summer. Så å bruke algebraiske teknikker som funker helt fint når begge sider av ligningen er endelige har rare konsekvenser når den ene siden er en uendelig sum.

F.eks. det vi egentlig gjorde i andre linje var at vi skrev $4S = 4+8+16+\dots$ som $4S = 0+4+0+8+0+16+\dots$. For en endelig sum går det helt fint. Logisk sett så burde jo ikke å legge til 0 endre summen. Men pardoksalt nok, å sette inn nuller i en divergent rekke kan faktisk endre summen vi ender opp med.

Moralen: rare ting kan skje når vi jobber med uendelige ting :)

Selv om innholdet i denne oppgaven egentlig er ganske shady, så er det (visstnok) nyttig å kunne gi divergente rekker noen faktiske verdier, f.eks. i kompleksanalyse eller stringteori (ikke spør meg om detaljer...).
Så denne typen teknikk har faktisk sin plass, :)

For de nysgjerrige:

Relevante wikipedia artikler å sjekke ut:
- "$1+2+3+4+\dots$"
- "Ramanujan summation"
- "$1-2+3-4+\dots$" [se §2.1 for argumentet for at dette blir $\frac{1}{4}$]

Lignende rekker på wikipedia:
- "$1+1+1+1+\dots$"
- "Grandi's series"
- "$1+2+4+8+\dots$"
- "$1-2+4-8+\dots$"
- "$1-1+2-6+24-120+\dots$"

YouTube video: "Ramanujan summation" av singingbanana (James Grime)
Er sikkert mange andre gode videoer på YouTube og ellers om dette, så er bare å utforske dette hvis du syntes dette var gøy :)