

1 Den aller viktigste potensrekken er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vis at denne konvergerer for alle x . (Enklest med forholdstesten.)

Forholdstesten: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ regn ut $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

• hvis $\rho < 1 \Rightarrow$ rekken konvergens

• hvis $\rho > 1 \Rightarrow$ divergens

• hvis $\rho = 1 \Rightarrow$ vel ikke :/

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) \cdot n \cdot (n+1)} \right| = \left| x \cdot \frac{1}{n+1} \right| \rightarrow 0 < 1$$

$\Rightarrow$ rekken konv. for alle $x \in \mathbb{R}$.

To andre viktige rekker er

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

2 Vis at rekkene over konvergerer for alle x .

$$\begin{aligned} \sin x : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right| = \left| (-1) \cdot \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| \\ &= \left| (-1) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \right| \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{konvergens } \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x : \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}} \right| &= \left| (-1) \cdot \frac{x^{2n+2}}{x^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right| = \left| (-1) \cdot x^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \right| \rightarrow 0 < 1 \\ &\Rightarrow \text{konv. } \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Det finnes også rekker for andre funksjoner. Vi kjenner jo til

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

som konvergerer for $|x| < 1$. Det er stort sett (med noen unntak) lov å herje med rekker som man vil.

3 Finn en rekkeutvikling for

$$\frac{1}{1+x}$$

(Hint: substitusjon.)

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$u = -x$

4 Hva med

$$\frac{1}{1+x^2}?$$

(Hint: også substitusjon.)

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$u = x^2$

5 Enn

$\arctan x$?

$$\arctan(\tan x) = x$$

(Hint: integrer ledd for ledd.)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

6 Eller

$\ln(1-x)$?

(Hint: integrer ledd for ledd.)

$$(\ln(1-x))' = -\frac{1}{1-x}$$

$$\ln(1-x) = -\int \frac{1}{1-x} dx = -\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

7

$$\frac{1}{(1-x)^2}?$$

(Hint: multipliser to rekker eller deriver ledd for ledd.)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^l = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^l = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^l = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)^l = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

Å vise at alt dette er lov, er ganske vanskelig, og litt for hardt for oss. Men det går an å finne konvergens-områdene (altså de x slik at rekken er konvergent) ved å bruke konvergenstestene.

7 Gjør dette.