

Grenseverdier

Når vi studerer en funksjon $f(x)$ er det naturligvis nyttig å kunne evaluere f på så mange mulige verdier av x som mulig. Men det er jo desverre ikke alltid mulig.

E.g. $f(x) = \frac{1}{x}$ er ikke definert for $x=0$.

Et alternativ er å prøve å se på **grenseverdien** til f . Intuitivt, så studerer vi da hva som skjer med $f(x)$ når x nearmer seg en gitt verdi.

Defn: En funksjon f har grenseverdi L i a dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

For å tolke hva som egentlig skjer i denne definisjonen er det nyttig å vite at vi kan skrive om den første ulikheten som følger:

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta$$

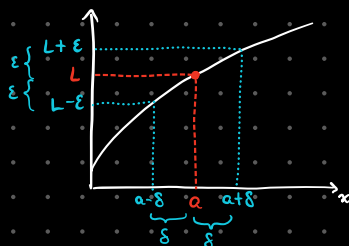
Her er jo a og L noen forhåndsbestemte tall, så denne ulikheten er tilfredsstillt av alle x -verdier i intervallet $(a - \delta, a + \delta)$. Eller med andre ord, alle x -verdier slik at avstanden til a er mindre enn δ .

På liknende vis har vi: $|f(x) - L| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < f(x) - L < \epsilon \Leftrightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$
Hvis denne ulikheten holder, så er da avstanden mellom $f(x)$ og L mindre enn ϵ .

Så vi kan også uttrykke definisjonen over som følgende:

En funksjon f har grenseverdi L i a dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at for enhver x som har avstand mindre enn δ fra a , så har også $f(x)$ avstand mindre enn ϵ fra L .

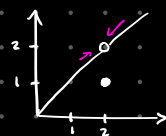
Eller med andre ord, når x er nær a , så skal også $f(x)$ være nær L .



Velger du en x -verdi i $(a - \delta, a + \delta)$, altså som har avstand $< \delta$ til a , så har den tilsvarende verdien $f(x)$ avstand $< \epsilon$ til L .

For funksjoner f og x -verdier a som det går fint å evaluere f på, så vil vi ofte ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Men det gjelder ikke alltid, så vær obs!

Eks: $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$

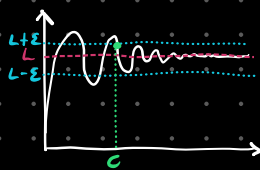


Hvis vi starter på en $x \neq 2$ og ser på $f(x)$ når vi beveger oss mot $x=2$, så beveger verdien av $f(x)$ seg mot 2, så $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$. Men funksjonen er definert slik at $f(2) = 1$.

Ved hjelp av grenseverdier er det også mulig å jobbe mer med uendelig, noe vi ikke kan når vi bare evaluerer funksjoner.

Defn.: • $f(x)$ har grenseverdi L når $x \rightarrow \infty$ ("x går mot uendelig") dersom for enhver $\varepsilon > 0$ så finnes det et tall c slik at når $x > c$ så holder $|f(x) - L| < \varepsilon$

• $f(x)$ har grenseverdi L når $x \rightarrow -\infty$ dersom for enhver $\varepsilon > 0$ så finnes det et tall c slik at når $x < c$ så holder $|f(x) - L| < \varepsilon$

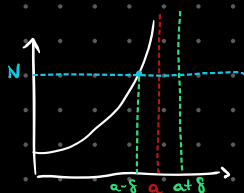


For alle x -verdier slik at $x > c$, så har $f(x)$ avstand $< \varepsilon$ fra L .

Altså, når x blir uendelig stor, så kommer $f(x)$ nærme L .

Defn.: • $f(x)$ har grenseverdi ∞ når $x \rightarrow a$ dersom for enhver $N > 0$ så finnes det en $\delta > 0$ slik at for enhver x slik at $0 < |x - a| < \delta$ så holder $f(x) > N$.

• $f(x)$ har grenseverdi $-\infty$ når $x \rightarrow a$ dersom for enhver $N < 0$ så finnes det en $\delta > 0$ slik at for enhver x slik at $0 < |x - a| < \delta$ så holder $f(x) < N$.

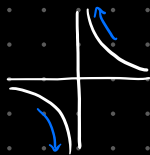


For alle x -verdier som har avstand $< \delta$ til a , så har vi $f(x) > N$.

Altså, når x nærmer seg a , så blir $f(x)$ uendelig stor.

Dersom en funksjon har en grense i et punkt, så skal denne grensen være entydig. Hvis du dermed har en funksjon f og et punkt a slik at det ikke går an å peke ut en grenseverdi i a , så eksisterer ikke grensen til f i a .

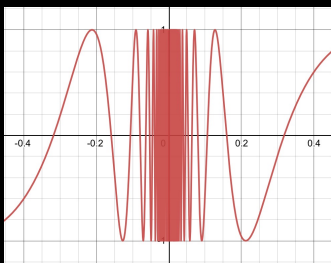
Eks.: $f(x) = \frac{1}{x}$



$\frac{1}{x}$ har ingen grenseverdi i $x=0$. Hvis vi starter på en $x > 0$ og beveger oss mot $x=0$, så beveger $\frac{1}{x}$ seg mot $+\infty$. Og hvis vi starter på en $x < 0$ og går mot $x=0$ så går $\frac{1}{x}$ mot $-\infty$.

Så vi kan ikke peke ut en grenseverdi i $x=0$.

Eks.: $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$



Startet vi på en $x \neq 0$ og beveger oss mot $x=0$, vil $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscillere raskere og raskere mellom -1 og 1 . Funksjonen vil aldri nærme seg én enkelt verdi, så den har ingen grenseverdi i $x=0$.

Defn. (uformelt): (Ensidige grenser) $f(x)$ har grenseverdi L når x går mot a **ovenfra**, eller **fra høyre**, dersom vi kan få avstanden mellom $f(x)$ og L til å bli så liten vi vil ved å velge en x som er større enn og nær a .
Da skriver vi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

Tilsvarende kan vi definere grensen til f når x går mot a **nedenfra**, hvor x velges til å være mindre enn a .
Og da skriver vi $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

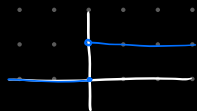
Den tosidige grensen eksisterer og er lik L hvis og bare hvis begge de ensidige grensene finnes og er lik L .
Altså:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Eks: $f(x) = \frac{1}{x}$. Vi har $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ og $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$. Disse er ikke like, så $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ eksisterer ikke.

Eks: Heaviside funksjonen

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = 1$ og $\lim_{x \rightarrow 0^-} u(x) = 0$, så $\lim_{x \rightarrow 0} u(x)$ eksisterer ikke.

Kontinuitet

Defn: En funksjon f er **kontinuerlig i a** dersom $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Vi sier at f er **kontinuerlig** hvis den er kontinuerlig i a for alle verdier a i definisjonsmengden til f .

Eks: $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$ er ikke kontinuerlig i 2.

Intuitivt, så er f kontinuerlig hvis man kan tegne grafen til f uten å måtte løfte pennene fra papiret.

Kontinuerlige funksjoner er fine blant annet fordi de, til en viss grad, er forutsigbare.

Hvis f er kontinuerlig i et punkt a og vi beveger oss littegranne bort fra a , så kan vi være trygge på at $f(x)$ også bare vil endre verdi littegranne.

Eks: Heavisidefunksjonen har en diskontinuitet i $x=0$. I $x=0$ har vi $u(0) = 0$, men hvis vi øker verdien av x i det hele tatt så får vi $u(x) = 1$. Så u hopper plutselig fra 0 til 1.

$$u(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Eks: $f(x) = x^2$ er kontinuerlig for alle verdier av x . Faktisk så er alle polynomer i en variabel kontinuerlige.



Som med grenseverdier kan vi snakke om kontinuitet fra høyre eller venstre.

Defn: f er kontinuerlig **ovenfra i a** hvis $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
 f er kontinuerlig **nedenfra i a** hvis $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Dette er nyttig å ha for hvis vi studerer en funksjon som er definert på et intervall, slik at vi kan snakke om kontinuitet i endepunktene. E.g. en funksjon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

En ting å legge merke til i definisjonen av kontinuitet, er at hvis vi skal ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ så må jo $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ eksistere. Det vil si at hvis f er kontinuerlig i a , så må jo også f ha en grenseverdi i a .

Men det motsatte er ikke sant: hvis f har en grenseverdi i a , så er det ingen garanti for at f er kontinuerlig i a .

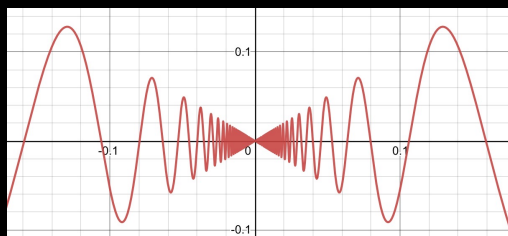
Eks.: $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$. Funksjonen er ikke definert i $x=0$ og kan dermed umulig være kontinuerlig.

Men vi har $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Hvis vi i stedet definerer f som

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

da er den kontinuerlig.



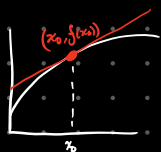
Derivasjon

Defn: Den derivate til en funksjon f i punktet x er funksjonen f' definert som

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

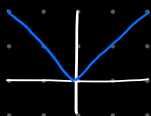
dersom denne grenseverdien eksisterer. Da sier vi at f er deriverbar i x , og vi sier f er deriverbar hvis den er deriverbar i alle verdier av x .

Dersom f' eksisterer i x_0 , så kan tallet $f'(x_0)$ tolkes som stigningstallet til tangenten til f i x_0 .



Faktisk så er ligningen for tangenten i x_0 gitt av
 $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Eks.: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$. I $x=0$ har vi:



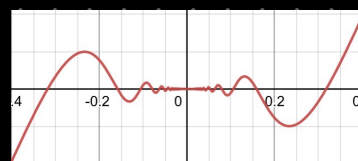
$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

De ensidige grense eksisterer ikke, så $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$ kan ikke eksistere. Dermed er f ikke deriverbar i 0.

En nyttig ting å vite er at dersom f er deriverbar i x , så er også f kontinuerlig i x .

Eks.: $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Man kan vise at denne funksjonen er deriverbar.



Kontinuerlig deriverbarhet

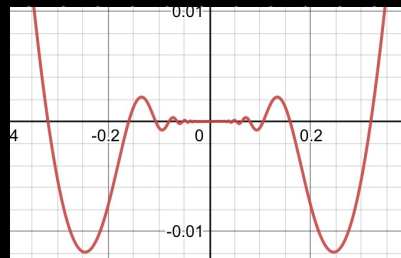
Defn: En funksjon f er **kontinuerlig deriverbar** dersom f er deriverbar og f' er kontinuerlig.

Eks: Det går an å vise at $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ er kontinuerlig deriverbar.

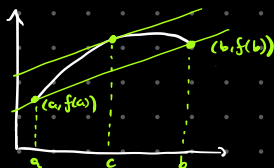
Det går an å fortsette på dette viset. Så vi kan snakke om dobbelt deriverbare funksjoner, altså funksjoner f hvor f' er deriverbar, og få f'' . Og vi kan se på når f'' er kontinuerlig.

Og så kan vi se på når f'' er deriverbar, osv.

Drar vi dette så langt som mulig, kan vi sture funksjoner som kan deriveres uendelig mange ganger. Et eksempel på en sanna funksjon er e^x .



Sekantsetningen: Hvis f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) , da finnes det en $c \in (a, b)$ slik at
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Altså, det finnes (minst én) c sanna at tangenten i c er parallell med sekanten i a og b .

Taylor's teorem: Hvis f er $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar på et åpent intervall som inneholder a og x , da finnes det en ξ mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Høyresiden av likningen minus det siste leddet er det n -te ordens Taylorpolynomiet til f om a .

Taylor's teorem sier, på en måte, at en $(n+1)$ ganger kontinuerlig funksjon f kan estimeres av det n -te ordens Taylorpolynomiet til f . Det siste leddet blir da et slags feilledd.

Merk at hvis $n=0$, da har vi: $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a) \iff f(x) - f(a) = f'(\xi)(x-a)$

$$\iff f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

altså sekantsetningen. Så Taylor's teorem kan, på et vis, tolkes som en mer generell versjon av sekantsetningen.

Hvis f er uendelig ganger deriverbar, sier vi den er **glatt**. Og i så fall er det jo mulig for oss å sette sammen en rekke:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

Dette kalles **taylorrekken** til f .

Blir du bedt om å finne taylorrekken til en funksjon f om et a , så er det da bare å sette inn funksjonen f og a i denne formelen, og forenkle det du kan.

Derom f er **glatt** og lik taylorrekken sin, altså $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$, sier vi at f er **analytisk**.

Selv om det kan virke merkelig å tenke på, så går det an å ha glatte funksjoner som ikke er lik taylorrekken sin, og dermed ikke er analytisk.

Et eksempel på det er

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Litt oppsummering

- En funksjon f har grenseverdi L i a hvis $f(x)$ nærmer seg L når x nærmer seg a .
- f er kontinuerlig i a hvis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$, vi kan også beskrive f som C eller C^0 .
- f er deriverbar i a hvis den har en entydig tangent i a .
- f er kontinuerlig deriverbar hvis f' eksisterer og er kontinuerlig, da kan f også kalles C^1 .

Vi kan fortsette dette mønsteret:

f er 2 ganger kontinuerlig deriverbar hvis f'' eksisterer og er kontinuerlig, vi sier f er C^2

f er 3 ganger kontinuerlig deriverbar hvis f''' eksisterer og er kontinuerlig, vi sier f er C^3

;

f er n ganger kontinuerlig deriverbar hvis f^n eksisterer og er kontinuerlig, vi sier f er C^n

;

f er uendelig ganger kontinuerlig deriverbar hvis f^n finnes for alle tall n , vi sier f er C^∞ eller at f er **glatt**.

Sekantsetningen: Hvis f er kont. på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) , da finnes en $c \in (a, b)$ sånn at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{a - b}$$

eller: tangenten i c er parallell med sekanten gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$,
altså tangenten i c og sekanten gjennom $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ har samme stigningstall.

Taylorsteorem: Hvis f er $(n+1)$ ganger kontinuertlig deriverbar på et åpent interval som inneholder a og x , da finnes en $\xi \in (a, x)$ sånn at

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{det } n\text{-te Taylorpolynomiet til } f \text{ i } a} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

eller: da er $f(x)$ lik det n -te Taylorpolynomiet til f i a pluss et ledd

eller: $f(x)$ er omtrent lik sitt n -te Taylorpolynom.

Hvis f er glatt, da er Taylorrekken til f om punktet a : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Hvis f er glatt og lik Taylorrekken sin, altså vi har $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, da er f analytisk.

$\sin(\frac{1}{x})$ har ingen grenseverdi i 0

$x \sin(\frac{1}{x})$ har grenseverdi i 0 , men er ikke kontinuertlig i 0

$\begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ er kontinuertlig i 0 , men ikke deriverbar

$\begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ er deriverbar i 0 , men ikke kontinuertlig deriverbar

$\begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ er kontinuertlig deriverbar i 0