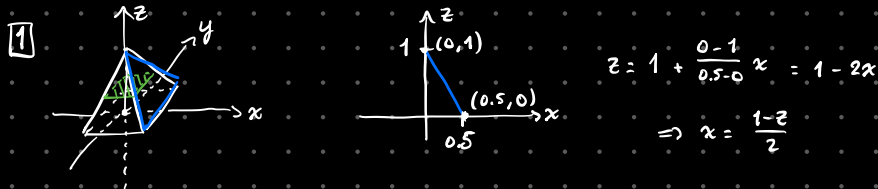


Nå skal vi regne ut volum. Dersom du har en funksjon som beskriver tverrsnittet av et objekt som funksjon av høyden eller liknende:

- 1 En pyramide har høyde 1 og kvadratisk grunnflate med sidekant 1. Finn en funksjon som beskriver arealet av tverrsnittet som funksjon av høyden. (Tegn det opp.)

kan man finne volumet av dette objektet ved å integrere:

- 2 Finn volumet av pyramiden.

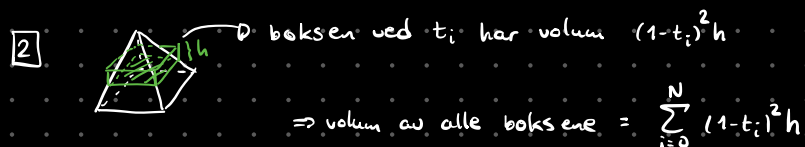


Ved høyde $z=t$, så har vi $x = \frac{1-t}{2}$

$\Rightarrow$ sidelengden er $s = 2x = 1-t$

$\Rightarrow$ arealet er $s^2 = (1-t)^2$

$$\Rightarrow f(t) := (1-t)^2$$



la $h \rightarrow 0 \Rightarrow V = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N (1-t_i)^2 h = \int_0^1 (1-t)^2 dt$

Substitusjon: la $u = 1-t \Rightarrow du = -dt \Rightarrow dt = -du$

$$\Rightarrow \int (1-t)^2 dt = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{(1-t)^3}{3}$$

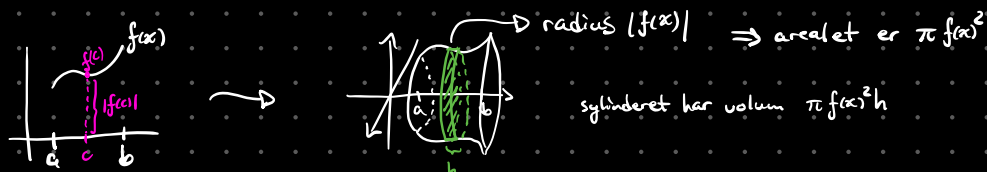
$$\Rightarrow V = \left[-\frac{(1-t)^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{(1-1)^3}{3} + \frac{(1-0)^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Dersom vi tar grafen til en funksjon $y = f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$ og dreier den en gang om x -aksen, får vi et omdreingslegeme. Volumet av dette kan beregnes på slikt vis.

- 3 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at volumet blir

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(Hint: tenk sirkelskive.)



$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n \pi f(x_i)^2 h \xrightarrow{h \rightarrow 0} V = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \pi f(x_i)^2 h = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

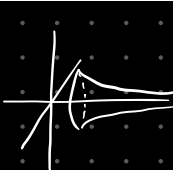
Det hender at studenter lurer på hvorfor man skal lære omdreiningslegemer. Den er flere viktige grunner til å lære dette. En av dem er at man må trene på riemannsumtankegangen, for ellers blir det veldig vanskelig å forstå fysikk. De folkene integrerer jo hele tiden. En annen grunn er at det blir mye lettere å skjønne dobbeltintegraler i tredje semester. Nå tar vi en klassiker.

- 4 Vi roterer funksjonen $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om x -aksen. Hva blir volumet?

Gabriels trompet



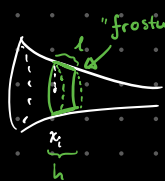
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} f(x)^2 dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{b} \right) = \pi(1 - 0) = \underline{\underline{\pi}} \end{aligned}$$

Men kan du male den på utsiden? Hvis vi dreier ting rundt x -aksen, kan vi også regne overflatearealet til omdreiningslegemet som oppstår.

- 5 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at overflatearealet til omdreiningslegemet blir

$$V = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(Hint: tenk sirkel og kombiner med forrige ukes visdom om buelengde.)



$$\begin{aligned} \text{Omkrets ved } x_i &= 2\pi |f(x_i)| \\ \text{Buelengde} &: \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h \end{aligned} \quad \left\{ \Rightarrow \begin{array}{l} \text{arealet til den grønne biten} \\ \text{er } 2\pi |f(x_i)| \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h \end{array} \right.$$

$$\leadsto \sum_{i=0}^n 2\pi |f(x_i)| \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h \xrightarrow{h \rightarrow 0} A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

- 6 Du bruker Gabriels trompet som malingsspann. Er det nok maling i spannet til å male trompetens overflate?

$$f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x} \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$A = 2\pi \int_1^{\infty} |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx$$

$$\text{sidan } 1 + \frac{1}{x^4} > 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} dx = 2\pi [\ln(x)]_1^b = 2\pi (\ln(b) - \overbrace{\ln(1)}^{=0}) = 2\pi \ln(b)$$

$$\Rightarrow A = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \ln(b) = \infty$$

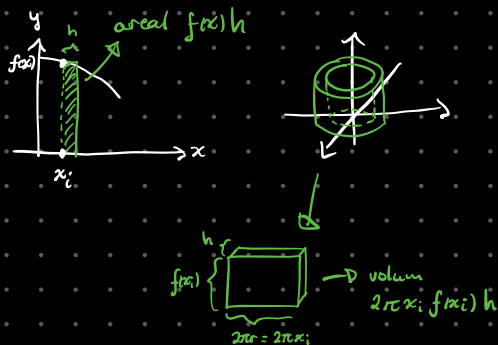
$\Rightarrow$ Gabriels trompet har areal ∞ (ikke nok waling)

Vi kan også dreie funksjoner om y-aksen.

- 7 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at hvis du dreier en funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ om y-aksen, blir volumet

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(Hint: tenk tynne sylinderskiver. Det blir også lettest å visualisere om man holder seg til $f \geq 0$ og $0 \leq a < b$.)



$$\sum_{i=0}^N 2\pi x_i f(x_i) h \xrightarrow{h \rightarrow 0} V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

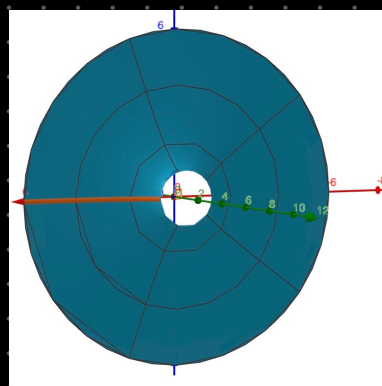
"Sylinderskallmetoden"

- 8 Jorden er som alle vet, uendelig stor og nesten flat. Den lille horisontkrummingen du ser når du er på havet skyldes at jordens overflate har samme form som funksjonen $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dreid om y-aksen. (I midten er det et hull der du kan stige ned til dødsriket.) Jorden har selvfølgelig uendelig stort volum, det vet alle. Vis dette.

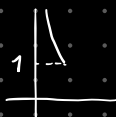
$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^{\infty} x f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^b x \cdot \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi \int_1^b 1 dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi [x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\pi (b - 1) = \underline{\underline{\infty}} \end{aligned}$$



- 9 Finn volumet av funksjonen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

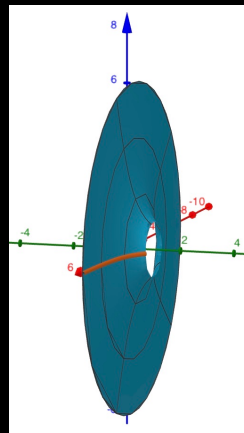
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dreid om y-aksen, og sammenlikne med oppgave 4.



$$V_f = 2\pi \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2\pi [x]_0^1 = 2\pi (1 - 0) = 2\pi$$

$$f'(x) = -1/x^2$$



$$g(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad V_g = 2\pi \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow V_f - V_g = 2\pi - \pi = \pi$$