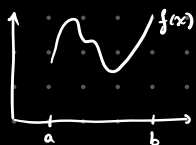


Buelengde

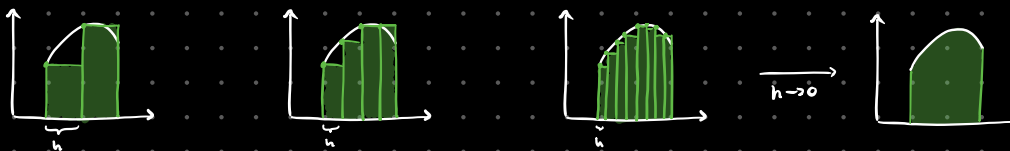
Vi har en kontinuerlig funksjon f definert på et intervall $[a, b]$. Hva er lengden til grafen til $f(x)$ på intervallet?



Altså, hva er buelengden f ?

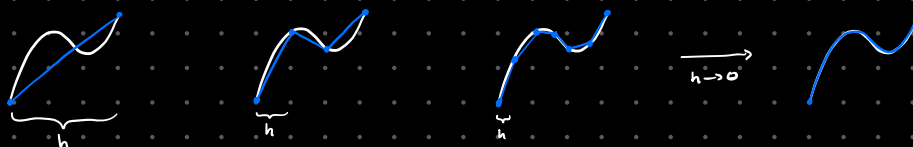
Husk at for et vanlig integral, så estimerer vi arealet under grafen til funksjonen med riemannsummer hvor hvert ledd i summen er arealet til et rektangel. Når vi fyller området under grafen med flere og flere rektangler, hvor rektanglene blir smalere og smalere, så blir estimatet av arealet bedre og bedre.

Når vi lar bredden på rektanglene gå mot 0 og lar antall rektangler gå mot ∞ , altså vi bruker grenseverdier, da får vi integralet til funksjonen som da beskriver arealet presist.



Vi skal gjøre noe lignende når vi jobber med buelengde. Men i stedet for å bruke rektangler til å estimere areal, skal vi bruke linjestykker for å estimere lengde.

Idéen er da egentlig det samme som før: Vi legger linjestykker langs grafen vår, måler lengden til hvert linjestykke, og legger sammen lengdene. Dette gir en riemannsum og et estimat på buelengden. Når vi da bruker flere og flere linjestykker hver av dem er kortere og kortere, så blir estimatet bedre. Vi lar da lengden på linjestykkene gå mot 0 og antall linjestykker gå mot ∞ . Resultatet blir et integral.



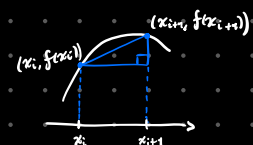
For å skrive opp riemannsummen vi er ute etter, så må vite lengden på et linjestykke.

Hvis f er definert på $[a, b]$, så tar vi en jevn partisjon av intervallet:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

hvor $h = \frac{b-a}{N}$, slik at vi har $x_{i+1} = x_i + h$ for alle i .

Vi fokuserer nå på et linjestykke, altså på et underintervall $[x_i, x_{i+1}]$, og vi vil finne lengden på det.



Som vi ser på tegningen kan vi tegne en rettvinklet trekant hvor linjestykket vårt er hypotenusen. Katetene er parallelle med x - og y -aksene.

Lengden på det horisontale katetet er da $x_{i+1} - x_i = x_i + h - x_i = h$

Lengden på det vertikale katetet er $f(x_{i+1}) - f(x_i)$. For å skrive dette om til noe nyttigere, bruker vi selvsagtsetningen. Så, det skal være en $c \in (x_i, x_{i+1})$ slik at $f'(c) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \Rightarrow f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c)h$

Tenk deg nå at vi allerede har lat N bli ganske stor og dermed er $h = \frac{b-a}{N}$ ganske liten. Da er intervallet (x_i, x_{i+1}) veldig lite, og dermed vil $c \in (x_i, x_{i+1})$ være ganske nært x_i . Da har vi $f'(c) \approx f'(x_i)$.

Vi kan dermed bruke $f'(x_i)h$ som en tilnærmet verdi på lengden av det vertikale katetet.

Dette ser kanskje litt tvilsomt ut, men siden vi skal la $h \rightarrow 0$ til slutt kommer vi til å ha $c \rightarrow x_i$ samtidig. Så det blir å ordne seg til slutt.

Vi bruker altså at lengden på det vertikale katetet er $f'(x_i)h$.

Hvis vi sier at hypotenusen har lengde l , da sier Pytagoras at vi har

$$l^2 = h^2 + (f'(x_i)h)^2 = h^2 + f'(x_i)^2 h^2 = h^2(1 + f'(x_i)^2)$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{h^2(1 + f'(x_i)^2)} = h \sqrt{1 + f'(x_i)^2}$$

Merk at vi har bare brukt den positive kvadratroten her fordi l er definert til å være en lengde, og da gir det ikke mening hvis l er negativ. Så vi forkaster den negative kvadratroten her.

Da har vi endelig lengden på linjestykket vårt. Samme argument kan gjentas for de andre linjestykkene, så vi kan nå legge sammen alle lengdene. Riemannsummen som estimerer lengden på grafen er da

$$\sum_{i=0}^N \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h$$

Hvis vi da lar $h \rightarrow 0$ (altså $N \rightarrow \infty$) får vi integralet som regner ut buelengden:

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx}$$

Eksempel: Oppgave 7 fra TMA4100 eksamen høst 2019

Finn buelengden til kurven gitt som grafen til $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $1 \leq x \leq 2$.

$$\text{La } f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x} \Rightarrow f'(x) = x^2 - \frac{1}{4x^2} = \frac{4x^4 - 1}{4x^2}$$

Da er buelengden til $y = f(x)$ for $1 \leq x \leq 2$ gitt ved

$$\int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{(4x^4 - 1)^2}{16x^4}} dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{16x^4 + 16x^8 - 8x^4 + 1}{16x^4}} dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{16x^8 + 8x^4 + 1}}{\sqrt{16x^4}} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{\sqrt{(4x^4 + 1)^2}}{4x^2} dx = \int_1^2 \frac{4x^4 + 1}{4x^2} dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{4x} \right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{59}{24}}}$$

Eksempel: Oppgave 7(a) fra TMA4100 kontinuasjonseksamen 2015

Beregn buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = (x+2)^{3/2}$, $2 \leq x \leq 7$.

Buelengden er

$$\int_2^7 \sqrt{1+f'(x)^2} dx = \int_2^7 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}(x+2)^{1/2}\right)^2} dx = \int_2^7 \sqrt{1+\frac{9}{4}(x+2)} dx = \int_2^7 \sqrt{\frac{9}{4}x + \frac{11}{2}} dx = \int_2^7 \sqrt{\frac{9x+22}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^7 \sqrt{9x+22} dx$$

substitusjon: $u = 9x+22 \Rightarrow du = 9 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{9} du$
 $x=2 \Rightarrow u=40$ $x=7 \Rightarrow u=85$

$$= \frac{1}{2} \int_{40}^{85} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{9} du$$

$$= \frac{1}{18} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{40}^{85} = \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} \left(85^{3/2} - 40^{3/2} \right) = \frac{1}{27} (85\sqrt{85} - 80\sqrt{10})$$

$$40^{3/2} = 40 \cdot \sqrt{40} = 40 \cdot \sqrt{4 \cdot 10} = 40 \cdot 2 \cdot \sqrt{10} = 80\sqrt{10}$$

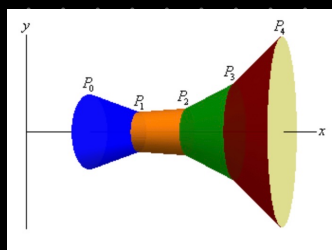
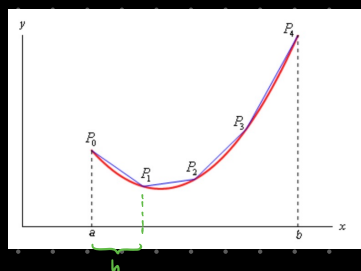
$$= \frac{1}{27} (5.17 \sqrt{5.17} - 5.16 \sqrt{5.2}) = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{5}}{27} (17\sqrt{17} - 16\sqrt{2})}}$$

Areal av omdreinningslegeme

Nå har vi grafen til en kontinuerlig funksjon $y=f(x)$ på et intervall $[a,b]$. Vi roterer grafen om x -aksen og vil regne ut arealet til omdreinningslegemet vi får.



Som tidligere skal vi lage en riemannsum som estimerer arealet. Hvis vi starter med grafen til f , så kan vi beskrive en tilnærming til den ved å legge linjestykker langs den, akkurat som når vi regnet på buelengde. Hvis vi roter hver av linjestykkene om x -aksen, da får vi en figur bestående av flere frusta.



Som tidligere blir da riemannsummen bare summen av arealet av hver frustum.

Og ved å la $h \rightarrow 0$ og $N \rightarrow \infty$ får vi da et integral som beskriver arealet til omdreinningsfiguren.

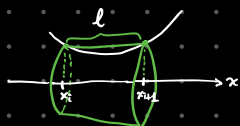
Så vi må først finne arealet til ett frustum.

Vi tar igjen en jevn partisjon

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

hvor $h = \frac{b-a}{N}$ sånn at $x_{i+1} = x_i + h$.

Vi studer frustumet på et underintervall $[x_i, x_{i+1}]$.



Arealet til et frustum er gitt ved formelen: $\pi(r_1 + r_2)l$

hvor r_1 er radiusen i den ene enden til frustumet, r_2 er radiusen i den andre enden, og l er lengden på sidene til frustumet.

Her har vi at radiusen i x_i er $|f(x_i)|$, og i x_{i+1} er den $|f(x_{i+1})|$. Lengden l finner vi akkurat som når vi jobbet med buelengde (i.e. når vi fant lengden på hypotenusen over), så vi får $l = \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h$.

Da får vi at arealet til frustumet er $\pi(|f(x_i)| + |f(x_{i+1})|) \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h$.

Men som når vi jobbet med buelengde, så kan vi gjøre en forenkling. Hvis h er liten, så er x_i og x_{i+1} ganske nærme hverandre, slik at vi har $f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$. Siden vi skal la $h \rightarrow 0$ senere, så kan vi bruke $f(x_{i+1}) = f(x_i)$ i uttrykket vårt. Da får vi at arealet blir: $2\pi |f(x_i)| \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h$.

Vi gjentar dette argumentet for alle frosta og legger sammen arealene. Vi ender opp med riemannsummen

$$2\pi \sum_{i=0}^{N-1} |f(x_i)| \sqrt{1 + f'(x_i)^2} h$$

Så lar vi $h \rightarrow 0$, og da får vi at integralet som beskriver arealet av et omdreiningslegeme om x -aksen er

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Eksempel: Variasjon av oppgave 5 fra TMA4100 kontinuasjonseksamen høsten 2016

La $f(x) = \sqrt{x}$ for $0 \leq x \leq 4$



Finne arealet av omdreiningslegemet vi får når $y = f(x)$ for $0 \leq x \leq 4$ roteres om x -aksen.

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

Arealet er:

$$A = 2\pi \int_0^4 |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{4}x} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x(1 + \frac{1}{4}x)} dx = 2\pi \int_0^4 \sqrt{x + \frac{1}{4}x^2} dx$$

$$u = x + \frac{1}{4} \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{3} (x + \frac{1}{4})^{3/2}$$

$$\Rightarrow A = 2\pi \left[\frac{2}{3} (x + \frac{1}{4})^{3/2} \right]_0^4 = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \left((4 + \frac{1}{4})^{3/2} - (\frac{1}{4})^{3/2} \right) = \frac{4\pi}{3} \left((\frac{17}{4})^{3/2} - (\frac{1}{4})^{3/2} \right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{17\sqrt{17}}{8} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{3} \left(\frac{17\sqrt{17} - 1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)}}$$