

Differensialligninger

Vanligeligninger: x er ukjent variabel, e.g. $ax+b=0$, $ax^2+bx+c=0, \dots$

Diff.ligninger: $x(t)$ er ukjent funksjon, e.g. $\dot{x}+ax=0$, $\ddot{x}+a\dot{x}+b=c, \dots$

La oss varme opp med en likning du løste på skolen.

1 Finn den generelle løsningen til

$$\dot{x} + ax = 0 \quad \leftarrow \text{separabel}$$

$$\dot{x} + ax = 0 \Rightarrow \dot{x} = -ax \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = -a$$

$$\Rightarrow \int \frac{\dot{x}}{x} dt = \int -a dt \quad \rightarrow \quad (\ln(x(t)))' = \frac{1}{x(t)} \cdot \dot{x}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}$$

$$\Rightarrow \ln(x(t)) = -at + k$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-at+k} = e^{-at} e^k = \underline{\underline{C e^{-at}}} \quad C = e^k$$

$$\dot{x}(t) + ax(t) = -C a e^{-at} + a C e^{-at} = 0$$

2 Finn løsningen til initialverdiproblemet

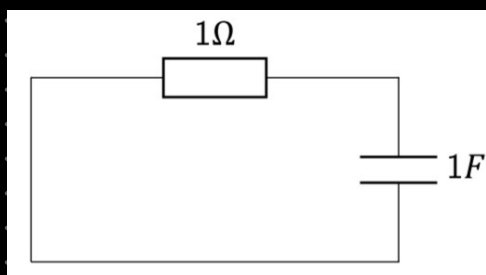
$$\dot{x} + x = 0 \quad x(0) = 1$$

Sett $a=1$ i forrige oppgave $\Rightarrow x(t) = C e^{-t}$

$$1 = x(0) = C \cdot e^0 = C \cdot 1 = C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow x(t) = \underline{\underline{e^{-t}}}$$

3 Finn strømmen i kretsen dersom $i(0) = 1$.



← kondensator

$$1\Omega \cdot i + \frac{1}{1F} \int i dt = 0$$

$$\Rightarrow i' + i = 0, \quad i(0) = 1$$

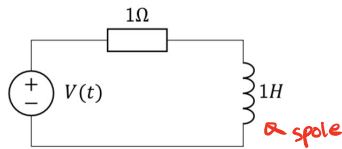
$$\Rightarrow \text{fra forrige oppgave: } i(t) = e^{-t}$$

Når vi har kontroll på likningen over, kan vi komplisere det litt. Likningen

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)$$

løses med å gange med integrerende faktor. Dette lærte du på skolen, og husker du det ikke, kan du slå opp i kap. 7.9 i Adams.

4 Finn strømmen i kretsen når $V(t) = k$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0$.



$$\mu(t) = \int p(t) dt$$

$\Rightarrow$ integrerende faktoren
er $e^{\mu(t)}$

lineære diff. ligninger

$$1 \cdot i + 1 \cdot i' = V(t) \Rightarrow i' + i = k, \quad i(0) = 0$$

$$\mu(t) = \int 1 dt = t \Rightarrow \text{i.f.} = e^t$$

$$i' + i = k \Rightarrow \underbrace{i'e^t + i e^t}_{\frac{d}{dt}(i e^t)} = k e^t \Rightarrow \frac{d}{dt}(i e^t) = k e^t$$

$$\Rightarrow i e^t = \int k e^t dt = k e^t + C$$

$$\Rightarrow i(t) = k + C e^{-t}$$

$$0 = i(0) = k + C \cdot 1 = k + C \Rightarrow C = -k$$

$$\Rightarrow i(t) = k - k e^{-t} = \underline{\underline{k(1 - e^{-t})}}$$

5 Finn strømmen i kretsen over når $V(t) = \cos t$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0$.

$$i' + i = \cos t, \quad i(0) = 0$$

$$\mu(t) = \int 1 dt = t \Rightarrow \text{i.f.} = e^t$$

$$i' + i = \cos t \Rightarrow \underbrace{i'e^t + i e^t}_{\frac{d}{dt}(i e^t)} = e^t \cos t \Rightarrow \frac{d}{dt}(i e^t) = e^t \cos t$$

$$\Rightarrow i e^t = \int e^t \cos t dt = e^t \cos t + \int e^t \sin t dt$$

$$= e^t \cos t + e^t \sin t - \int e^t \cos t dt$$

$$\Rightarrow 2 \int e^t \cos t dt = e^t \cos t + e^t \sin t = e^t (\cos t + \sin t)$$

$$\Rightarrow i e^t = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + C$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) + C e^{-t}$$

$$0 = i(0) = \frac{1}{2} (1 + 0) + C \cdot 1 = \frac{1}{2} + C \quad \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow i(t) = \underline{\underline{\frac{1}{2} (\cos t + \sin t - e^{-t})}}$$