

Testeksamen 1

Oppgave 1 Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og diagonaliser A dersom det er mulig.

Se uke 37

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

↑ ↑
egenvektor egenverdi

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

$$\underline{\lambda=1}: A - 1I_3 = A - I_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A - I_3)\vec{v} = \vec{0} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad \text{L } v_1 = t \text{ være fri}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

A er ikke diagonaliserbar (for få lineært uavhengige egenvektorer)

Oppgave 2 Finn en løsning til

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_3$$

som tilfredsstiller

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = 0$$

Se uke 45

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

$$\vec{x}(t) = C e^{\lambda t} \vec{v} = C e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} C \cdot e^0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow \vec{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 3 Vis at

$$x(t) = x_0 e^{-at}$$

er den eneste kontinuerlig deriverbare løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \quad x(0) = x_0.$$

La $h(t)$ være en løsning på problemet, altså $\dot{h} + ah = 0$ og $h(0) = x_0$.

$$\frac{d}{dt}(h(t)e^{at}) = \dot{h}(t)e^{at} + h(t)ae^{at} = \underbrace{(\dot{h}(t) + ah(t))}_{=0}e^{at} = 0$$

$$\Rightarrow h(t)e^{at} = \int 0 dt = C$$

$$\Rightarrow h(t) = Ce^{-at}$$

$$x_0 = h(0) = C \cdot e^0 = C$$

$$\Rightarrow h(t) = x_0 e^{-at} = x(t) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{-at} \text{ er eneste løsning.}$$

Oppgave 4 Finn et tredjeordens polynom som går gjennom punktene (0, 1), (1, 2), (2, 3) og (3, 5).

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\begin{aligned} f(0) &= a = 1 \\ f(1) &= a + b + c + d = 2 \\ f(2) &= a + b \cdot 2 + c \cdot 2^2 + d \cdot 2^3 = 3 \\ f(3) &= a + b \cdot 3 + c \cdot 3^2 + d \cdot 3^3 = 5 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 27 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 24 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/6 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 4/3 \\ c &= -1/2 \\ d &= 1/6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

Sjekk: $f(0) = 1$ ✓ $f(1) = 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2$ ✓

$$f(2) = 1 + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} + \frac{8}{6} = 3$$
 ✓

$$f(3) = 1 + \frac{12}{3} - \frac{9}{2} + \frac{27}{6} = 5$$
 ✓

Oppgave 5 Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Antar $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ hvor $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Anta at $\frac{a}{b}$ er forenklet så mye som mulig $\Rightarrow$ minst én av a og b er oddetall

$$\Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ er et partall} \Rightarrow a \text{ er et partall}$$

$\Rightarrow$ skriv $a = 2k$ for et tall k (fordi: $\text{odde} \cdot \text{odde} = \text{odde}$)

$$\Rightarrow 2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \text{ partall} \Rightarrow b \text{ partall} \quad \downarrow$$

$\Rightarrow \sqrt{2}$ kan ikke skrives som en brøk.

Oppgave 6 Skriv et pythonscript for å løse likningen

$$2 \sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0$$

med fikspunktiterasjonen, og gjør rede for hvorfor fikspunktiterasjonen konvergerer i dette tilfellet.

$$g(\theta) = \theta$$

$$2 \sin(2\theta) + \pi - 4\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{1}{4}(2 \sin(2\theta) + \pi) = \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{La } g(\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Velg en startverdi θ_0 , f. eks. $\theta_0 = 0$.

$$\text{Regn } \theta_{n+1} = g(\theta_n)$$

$$\theta_1 = g(\theta_0)$$

$$\theta_2 = g(\theta_1)$$

$\vdots$

$$\leadsto \theta \approx 1.15494...$$

Oppgave 7 Finn summen til rekken

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}.$$

Kan vise at rekken konvergerer ved å bruke grensesammenligningstesten. Sammenligne med $\sum \frac{1}{n^2}$ (som konvergerer).

For å finne summen:

$$\text{Delbrøkopsparing} \Rightarrow \frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}$$

Skriv ut partialsummen og observer at de fleste leddene kanselleres:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n(n-2)} &= \sum_{n=3}^N \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 1} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 4} - \frac{1}{2 \cdot 6} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2(N-2-2)} - \frac{1}{2(N-2)} + \frac{1}{2(N-1-2)} - \frac{1}{2(N-1)} + \frac{1}{2(N-2)} - \frac{1}{2N} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(N-1)} - \frac{1}{2N} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N-1)} - \frac{1}{2N} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=3}^N \frac{1}{n(n-2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2(N-1)} - \frac{1}{2N} \right) = \frac{3}{4} - 0 - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

Oppgave 8 Beregn

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\theta) \cos(\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned} \int \overset{v}{\cos(2\theta)} \overset{u'}{\cos(\theta)} d\theta &= \cos(2\theta) \sin(\theta) + 2 \int \overset{v}{\sin(2\theta)} \overset{u'}{\sin(\theta)} d\theta \\ &= \cos(2\theta) \sin(\theta) + 2 \left[-\sin(2\theta) \cos(\theta) + 2 \int \cos(2\theta) \cos(\theta) d\theta \right] \\ &= \cos(2\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(2\theta) \cos(\theta) + 4 \int \cos(2\theta) \cos(\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \cos(2\theta) \cos(\theta) d\theta = -\frac{1}{3} \left[\cos(2\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(2\theta) \cos(\theta) \right]$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\theta) \cos(\theta) d\theta = \left[-\frac{1}{3} \left[\cos(2\theta) \sin(\theta) - 2 \sin(2\theta) \cos(\theta) \right] \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

$\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Oppgave 9 Siv har en kuleformet vanntank med radius R . På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

En sirkel med radius R og senter i $(R, 0)$ har ligning $(x-R)^2 + y^2 = R^2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - (x-R)^2}$

La $f(x) = \sqrt{R^2 - (x-R)^2}$ være den øvre halvdelen av sirkelen.

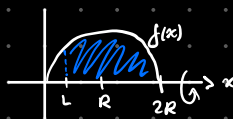
Roter grafen til f om x -aksen og regn ut volumet fra $x=L$ til $x=2R$

$$\Rightarrow V(L) = \int_L^{2R} \pi f(x)^2 dx$$

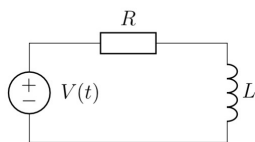
$$= \int_L^{2R} \pi (R^2 - (x-R)^2) dx$$

$$= \pi \int_L^{2R} (2Rx - x^2) dx$$

$$= \pi \left[Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right]_L^{2R} = \pi \left[4R^3 - \frac{8R^3}{3} - RL^2 + \frac{L^3}{3} \right] = \underline{\underline{\pi \left(\frac{4R^3}{3} - RL^2 + \frac{L^3}{3} \right)}}$$



Oppgave 10 Finn et uttrykk for strømmen i kretsen når $V(t) = k$. Det er ingen strøm i kretsen ved $t = 0$.



$$R \cdot i + L \cdot i' = V(t) = k$$

$$\Rightarrow i' + \frac{R}{L} i = \frac{k}{L}, \quad i(0) = 0$$

$$\text{integrerende faktor: } e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{R}{L} t}$$

$$\Rightarrow i e^{\frac{R}{L} t} + \frac{R}{L} i e^{\frac{R}{L} t} = \frac{k}{L} e^{\frac{R}{L} t}$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\frac{d}{dt} (i(t) e^{\frac{R}{L} t})$$

$$\Rightarrow i(t) e^{\frac{R}{L} t} = \int \frac{k}{L} e^{\frac{R}{L} t} dt = \frac{k}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C = \frac{k}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{k}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t}$$

$$0 = i(0) = \frac{k}{R} + C e^0 = \frac{k}{R} + C \Rightarrow C = -\frac{k}{R}$$

$$\Rightarrow i(t) = \underline{\underline{\frac{k}{R} - \frac{k}{R} e^{-\frac{R}{L} t}}}$$