

## Kapittel 5

# Første ordens differensiallikninger

De aller fleste differensiallikninger kan ikke løses på en fornuftig måte med penn og papir. Vi skal begynne med å løse noen relativt enkle likninger (regningen blir allerede her ganske komplisert) og så går vi over på numeriske metoder. Til slutt kommer noen teoretiske greier.

## Modeller

En differensiallikning er for de aller fleste som bruker dem en modell av et eller annet fysisk fenomen.

Logistisk vekst

Bærekapasitet

Fallskjerm

Kondensator

Celledeling

## Analytiske løsningsteknikker

**Eksempel 5.1.** Det aller enkleste initialverdiproblemet er

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0 \quad y(0) = c,$$

og alle barn i barnehagen vet at løsningen er

$$y(t) = y(0)e^{-at}.$$

Siden  $f(y) = y$  er kontinuerlig deriverbar overalt, må dette være den eneste løsningen, se avsnittet om vanskelig teori nederst.  $\Delta$

**Eksempel 5.2.** Hvis du ikke liker konseptet at læreren bare sier hva løsningen er, kan løsningen til likningen i forrige eksempel utledes ved å huske at likningen er separabel. En førsteordens differensiallikning kalles separabel om den kan skrives på formen

$$\dot{y}(t)f(y(t)) = g(t).$$

Disse løses ved å integrere med hensyn på  $t$  på begge sider. Vi skriver først om

$$y(t)' + ay(t) = 0$$

til

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -a.$$

Vi integrerer

$$\int_0^t \frac{\dot{y}(u)}{y(u)} du = - \int_0^t a du$$

og får

$$\ln y(t) - \ln y(0) = -at$$

slik at

$$y(t) = e^{-at + \ln y(0)} = y(0)e^{-at}. \quad \Delta$$

**Eksempel 5.3.** I mange tilfeller vil luftmotstanden til en partikkel i bevegelse avhenge kvadratisk av hastigheten til partikkelen. En geværkules horisontale hastighetskomponent beskrives av den separable differensiallikningen

$$-ky^2 = m\dot{y},$$

der  $k$  er en konstant som avhenger av kulens form, og  $m$  er kulens masse. La oss anta at kulens initialhastighet er  $y(0) = v$ . Vi skriver om til

$$-\frac{k}{m} = \frac{\dot{y}}{y^2}$$

integrerer opp

$$-\int_0^t \frac{k}{m} = \int_0^t \frac{\dot{y}}{y^2}$$

og får

$$-\frac{k}{m}t = \frac{1}{y(0)} - \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{y(t)},$$

eller

$$y(t) = \frac{1}{\frac{k}{m}t + \frac{1}{v}} = \frac{mv}{kvt + m}. \quad \Delta$$

**Eksempel 5.4.** Initialverdiproblemet

$$\dot{y}(t) = \sqrt{y(t)} \quad y(0) = 0,$$

har to løsninger

$$y_1(t) = 0$$

og

$$y_2(t) = \frac{t^2}{4}.$$

Problemet er at  $f(y) = \sqrt{y}$  ikke er kontinuerlig deriverbar i  $y = 0$ .  $\Delta$

### Eksempel 5.5. Likningen

$$\dot{y}(t) + ay(t) = f(t)$$

er ikke dekket av teoremet over, men den dukker opp i ett bankende kjøp i anvendelser, så vi skal bruke litt tid på å finne løsningen allikevel. Det første vi gjør, er å skrive opp løsningen for  $f = 0$ , altså løsningen av

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0.$$

Denne likningen kalles den homogene likningen. Løsningen kalles den homogene løsningen, og er som kjent gitt ved

$$y(t) = ce^{-at}.$$

Vi kan bruke denne til å utlede et uttrykk for løsningen til initialverdi problemet

$$\dot{y}(t) + ay(t) = f(t) \quad y(0) = 0$$

En stor vitenskapsmann har en gang i tiden skjønt at dersom  $f$  ikke er en grusom funksjon, kan løsningen fint skrives som

$$y(t) = c(t)e^{-at},$$

der  $c(t)$  er en ukjent funksjon. Vi setter dette uttrykket inn i likningen, og deduserer at

$$\begin{aligned} f(t) &= \dot{y}(t) + ay(t) \\ &= c'(t)e^{-at} - ac(t)e^{-at} + ac(t)e^{-at} \\ &= c'(t)e^{-at}. \end{aligned}$$

Men dette betyr at

$$c'(t) = e^{at}f(t),$$

og følgelig at

$$c(t) = \int_0^t e^{as}f(s) ds.$$

Løsningen blir

$$y(t) = e^{-at} \int_0^t e^{as}f(s) ds = \int_0^t e^{a(s-t)}f(s) ds.$$

Det siste integralet kalles en konvolusjon mellom  $f(s)$  og  $e^{as}$ , og dette blir veldig viktig i senere i studiet. Merk at løsningen tilfredsstiller  $y(0) = 0$ . Dersom man har initialbetingelse  $y(0) = c$ , kan løsningen enkelt justeres til

$$y(t) = ce^{-at} + \int_0^t e^{a(s-t)}f(s) ds. \quad \Delta$$

## Numeriske metoder

Vi skal lage numeriske metoder for å finne tilnærmede løsninger for initialverdi problemet

$$\dot{y} = f(t, y) \quad y(a) = c$$

på intervallet  $[a, b]$ . La oss starte med en jevn partisjon med  $n + 1$  punkter

$$t_i = a + hi$$

der

$$h = \frac{b-a}{n}$$

og  $0 \leq i \leq n$ . Vi er interessert i å finne tilnærminger til  $y(t_i)$ . Den første av disse kjenner vi, nemlig  $y(t_0) = y(a) = c$ , Tilnærmingene til de etterfølgende verdiene kaller vi  $y_i$ , og gjør vi alt riktig, vil vi ha

$$y_i \approx y(t_i)$$

for alle  $i$ .

Siden  $\dot{y}$  er en kontinuerlig funksjon på  $[a, b]$ , går det knirkefint å bruke analysens fundamentalteorem, og skrive

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(t) dt.$$

Siden  $\dot{y} = f(t, y)$ , kan vi skrive

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt.$$

Dette er arbeidshesten vår, og vi skal utlede numeriske metoder ved å sette inn forskjellige approksimasjoner for integralet på høyre side, samt erstatte  $y(t_{i+1}) - y(t_i)$  med  $y_{i+1} - y_i$  på venstre side.

**Eksempel 5.6.** Gjør man den særdeles enkle tilnærmingen

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t_i, y_i) dt = hf(t_i, y_i),$$

får man en metode som kalles Eulers eksplisitte metode:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i). \quad \Delta$$

For å komme i gang med beregningene, er det bare å definere  $y_0 = c$ , og så beregne

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = c + hf(a, c)$$

Når vi nå har  $y_1$ , kan vi tilsvarende beregne

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

og

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2)$$

og så videre, helt frem til

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

**Eksempel 5.7.** Velger man den tilsvarende enkle tilnærmingen

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx hf(t_{i+1}, y_{i+1}),$$

får man Eulers implisitte metode

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_{i+1}, y_{i+1}). \quad \Delta$$

**Eksempel 5.8.** Trapesregelen

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}))$$

gir trapesmetoden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})). \quad \Delta$$

**Eksempel 5.9.** Tilnærmer man trapesregelen med formelen

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{h}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y^*))$$

der  $y^* = y_i + hf(t_i, y_i)$  er et eksplisitt eulersteg, får man Heuns metode:

$$y^* = y_i + hf(t_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y^*)) \quad \Delta$$

**Eksempel 5.10.** Bruker man tilnærmingen

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx hf\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

får man midtpunktmetoden

$$y_{i+1} = y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right). \quad \Delta$$

Dette er alle metodene vi skal analysere, og alle er eksempler på noe som kalles Runge-Kutta-metoder. Metodene faller i to kategorier. I den ene kategorien (eksplisitt Euler og Heun) er  $y_{i+1}$  alene på den ene siden av likningen for metoden, mens i den andre kategorien (implisitt Euler og trapesmetoden) finner du  $y_{i+1}$  overalt i likningen, og det er ikke bare å løse for  $y_{i+1}$ .

Du lurer sikkert på hvorfor man har så mange forskjellige metoder, og det korte svaret er som ellers i anvendt matematikk: noen metoder eksisterer fordi de er lette å finne opp og forstå, mens andre metoder finnes fordi de er skikkelig bra. Dette skal vi se på nå.

**Eksempel 5.11.** Vi løser initialverdiproblemet

$$\dot{y} = -y \quad y(0) = 1$$

med Eulers eksplisitte metode på intervallet  $[0, 1]$ . Siden  $f(t, y) = -y$ , blir metoden

$$y_{i+1} = y_i - hy_i = (1 - h)y_i$$

med

$$y_0 = 1.$$

Løsning for  $h = 0.25$  gir figuren under. De blå diamantene er  $y_1, y_2, y_3, y_4$  og  $y_5$ , mens den røde kurven er den analytiske løsningen  $y = e^{-x}$ . Vi beregner  $y(1) = 1/e \approx 0.367879441171442$ , som kan sammenliknes med  $y_5 = 0.31640625$ :

$$y_5 - y(1) = -0.051473191171442. \quad \Delta$$

**Eksempel 5.12.** Vi løser samme problem som i sted med Eulers implisitte metode. Metoden blir

$$y_{i+1} = y_i - hy_{i+1},$$

som vi løser for  $y_{i+1}$ , og får

$$y_{i+1} = \frac{y_i}{(1 + h)}.$$

Figur under for  $h = 0.5$ . Vi får  $y_5 = 0.4096$ , og

$$y_5 - y(1) = 0.041720558828558. \quad \Delta$$

**Eksempel 5.13.** Trapesmetoden:

$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y_{i+1}).$$

Vi løser for  $y_{i+1}$ , og får

$$y_{i+1} = \frac{2 - h}{2 + h}y_i.$$

Denne treffer noe bedre:

$$y_5 - y(1) = -0.001929128719072. \quad \Delta$$

**Eksempel 5.14.** Heuns metode:

$$y^* = y_i - hy_i$$

$$y_{i+1} = y_i - \frac{1}{2}h(y_i + y^*)$$

og

$$y_5 - y(1) = 0.004649588674749.$$

Bedre enn Euler, men ikke helt trapesmetoden.  $\Delta$

Disse metodene oppfører seg litt forskjellig, og det ser ut som om noen er litt mer nøyaktige enn andre. Dette skal vi se en forklaring på i neste bolk, som handler om rekkeutvikling.

Metodene vi har utledet til nå, kalles enstegsmetoder, for kun  $y_{i+1}$  og  $y_i$  figurerer i likningene. Grunnen til at alle metodene er på denne formen, er at det kun er brukt en type endelig differansetilnærming på venstre side av

$$\dot{y}(x) = f(x, y(x)),$$

nemlig den første ordens differansen

$$\dot{y}(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Nå er det ingenting i veien for å bruke en høyere ordens tilnærming, for eksempel sentralføringen

$$\dot{y}(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Setter man denne inn for  $\dot{y}$ , får man leap-frog-metoden

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Her inngår både  $y_{i+1}$ ,  $y_i$  og  $y_{i-1}$ , og leap-frog er et eksempel på en flerstegsmetode. Flerstegsmetoder er ikke pensum i dette kurset.

## Feilanalyse

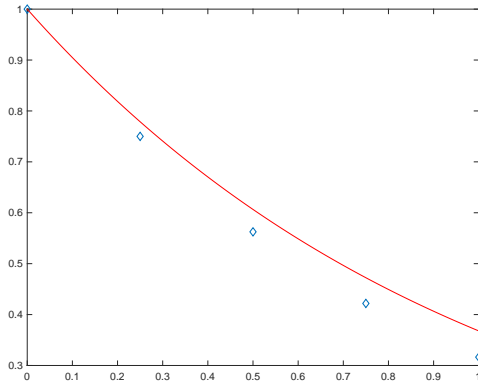
I dette avsnittet skal vi ta en titt på hvorfor metodene treffer så forskjellig. Vi skal indikere hvordan analysen får for eksplisitt Euler, og så skrive opp resultatet for de andre metodene.

Lineariseringen som gir det første eulersteget er

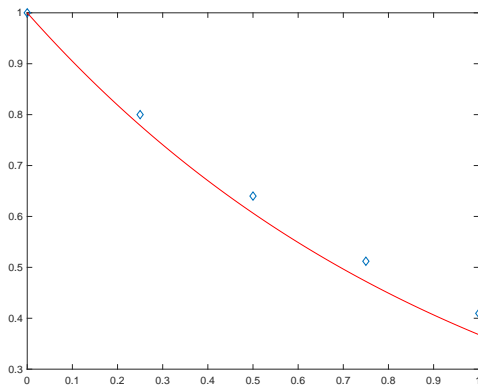
$$y(x_1) = y(x_0 + h)$$

$$\approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0))$$

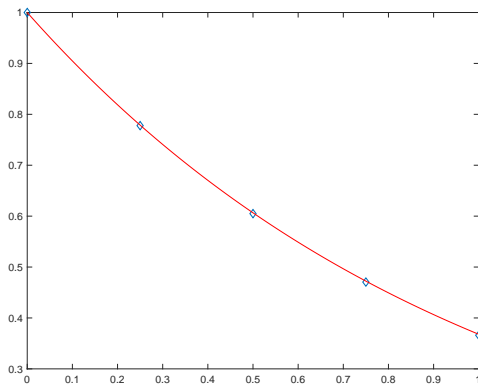
$$= y(x_0) + h\dot{y}(x_0).$$



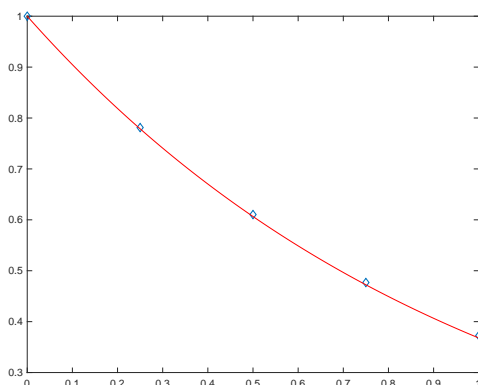
Figur 5.1: Eulers eksplisitte metode



Figur 5.2: Eulers implisitte metode



Figur 5.3: Trapesmetoden



Figur 5.4: Heuns metode

Vi antar at  $y$  er en analytisk funksjon, og taylorutvikler:

$$\begin{aligned} y(x_1) &= y(x_0 + h) \\ &= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \dots \end{aligned}$$

Sammenlikner vi denne med

$$y_1 = y(x_0) + hy'(x_0),$$

ser vi at feilen i det første eulersteget er gitt ved

$$y(x_1) - y_1 = \frac{y''(x_0)}{2}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{6}h^3 + \dots$$

altså taylorrekkehalen til  $y$ . Hvis vi antar at  $h$  er liten, slik at  $h^2$  er mye større enn  $h^3$ , og leddet

$$\frac{y''(x_0)}{2}h^2$$

dominerer halen på taylorrekken, er det ikke urimelig å hevde at eksplisitt Euler har lokal feil av størrelsesorden  $h^2$ .

Feilen etter ett steg er altså av størrelsesorden  $h^2$ . Men hva er feilen etter  $n$  steg? I eksemplene i forrige avsnitt, kjørte vi løserne på intervallet  $[0, 1]$ . La oss si at vi kjører på intervallet  $[x_0, x_0 + a]$ . Vi velger  $h$  slik at

$$x_n = x_0 + hn = x_0 + a$$

og

$$n = \frac{a}{h}.$$

Hvis vi nå gjør  $n$  steg med eksplisitt Euler, samler vi i hvert steg opp en lokal feil omtrent lik

$$\frac{y''(x_i)}{2}h^2.$$

Feilen etter  $n$  steg blir

$$\sum_{i=1}^n \frac{y''(x_i)}{2}h^2,$$

og hvis vi antar at  $y'' \leq M$  på  $[x_0, x_0 + a]$ , er det rimelig å hevde at

$$\sum_{i=1}^n \frac{y''(x_i)}{2}h^2 \leq Mnh^2 = M\frac{a}{h}h^2 = Mah.$$

Vi sier derfor at eulers metode har global feil av størrelsesorden  $h$ .

**Teorem 5.15.** Lokal og global feil for metodene:

Metode	Lokal feil	Global feil
Eksplisitt Euler	$h^2$	$h$
Implisitt Euler	$h^2$	$h$
Trapecmetoden	$h^3$	$h^2$
Heuns metode	$h^3$	$h^2$
RK4	$h^5$	$h^4$

Vi skal ikke bevise dette teoremet, men nevner at bevis-teknikken er den samme for alle metodene: taylorutvikle om  $x_0$  for å finne lokal feil, og så se på hva som skjer etter  $n$  steg. Dette teoremet forklarer langt på vei hva som skjedde i eksemplene i forrige avsnitt. Nå tar vi et par eksempler der vi lar  $h \rightarrow 0$ .

**Eksempel 5.16.** Vi kjører samme eksempel som i forrige avsnitt, men nå bruker vi Eulers eksplisitte metode for  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$  og så videre. Resultatene er oppsummert i følgende tabell:

$h$	$y_n - y(1)$
$10^{-1}$	$-1.920100107144218e - 02$
$10^{-2}$	$-1.847099898213078e - 03$
$10^{-3}$	$-1.840164004788258e - 04$
$10^{-4}$	$-1.839473847314865e - 05$
$10^{-5}$	$-1.839403194148215e - 06$

Dette eksemplet demonstrerer tydelig at feilen etter  $n$  steg er proporsjonal med  $h$ . På folkemunne sier man gjerne at man får en ekstra korrekt desimal hver gang man tideler  $h$ . Eulers implisitte metode oppfører seg omtrent likt, så den hopper vi over.  $\Delta$

**Eksempel 5.17.** Trapesmetoden for  $h = 0.1$ ,  $h = 0.01$  og så videre:

$h$	$y_n - y(1)$
$10^{-1}$	$-3.068987885734287e - 04$
$10^{-2}$	$-3.065695217463471e - 06$
$10^{-3}$	$-3.065658332745969e - 08$
$10^{-4}$	$-3.069314802317535e - 10$
$10^{-5}$	$-5.472844399889709e - 12$

Her er feilen etter  $n$  steg proporsjonal med  $h^2$ . På folkemunne sier man gjerne at man får to desimaler hver gang man tideler  $h$ . Heuns metode produserer omtrent den samme tabellen.  $\Delta$

**Eksempel 5.18.** RK4:

$h$	$y_n - y(1)$
$10^{-1}$	$3.332410560830112e - 07$
$10^{-2}$	$3.091293887536040e - 11$
$10^{-3}$	$3.996802888650564e - 15$
$10^{-4}$	$2.664535259100376e - 15$
$10^{-5}$	$-3.330669073875470e - 15$

Hva skjedde her? Feilen etter  $n$  steg proporsjonal med  $h^4$ , altså fire desimaler for hver tideling av  $h$ , men bare for de første tre tidelingene. Når  $h = 10^{-3}$  har vi nådd såkalt maskinpresisjon. Matlab regner bare med 16 desimaler, og dette setter en stopper for konvergensen.  $\Delta$

**Eksempel 5.19.** RK4, men nå har matlab fått beskjed om å regne med 32 desimaler:

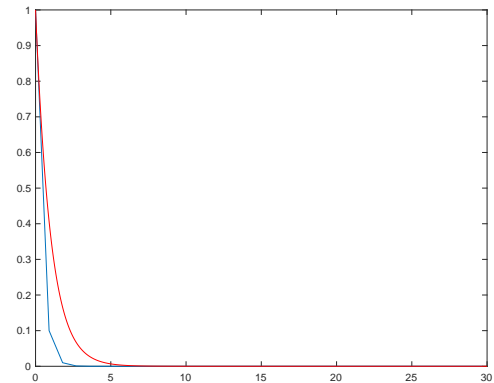
$h$	$y_n - y(1)$
$10^{-1}$	$3.332410561118064e - 07$
$10^{-2}$	$3.091319001284922e - 11$
$10^{-3}$	$3.068217823302200e - 15$
$10^{-4}$	$3.065917492545278e - 19$
$10^{-5}$	$3.065687557054922e - 23$

Tabellene til nå har tatt en brøkdel av et sekund å produsere. Til sammenlikning tok denne her rundt ti minutter, pluss noen timer knoting for å finne ut av hvordan matlab skal regne riktig med 32 desimaler. Presisjon koster!  $\Delta$

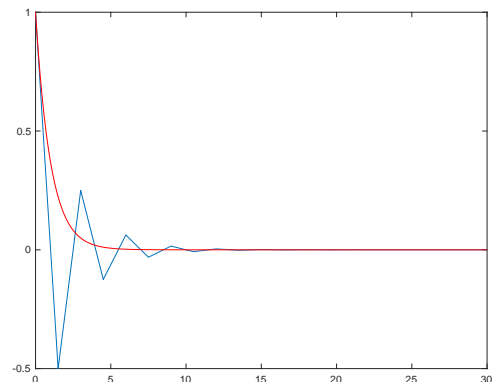
## Stabilitet

Har metodene noen andre egenskaper? Eulers eksplisitte og implisitte metoder ser til forveksling like ut, og har akkurat samme orden. Men de oppfører seg ganske forskjellig.

**Eksempel 5.20.** Vi kjører eksplisitt Euler på samme problem som over, men på intervallet  $[0, 30]$ , og  $h = 0.9$ . Det er trukket rette linjer mellom eulerstegene, så det skal bli litt enklere å se hva som skjer.  $\Delta$

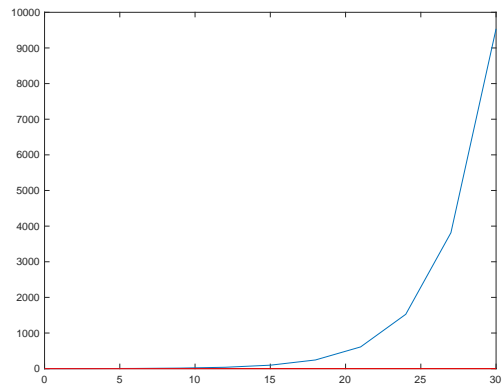
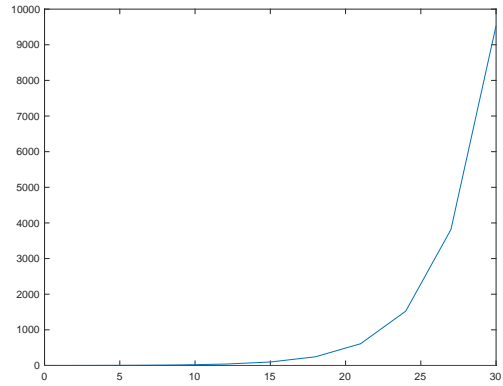
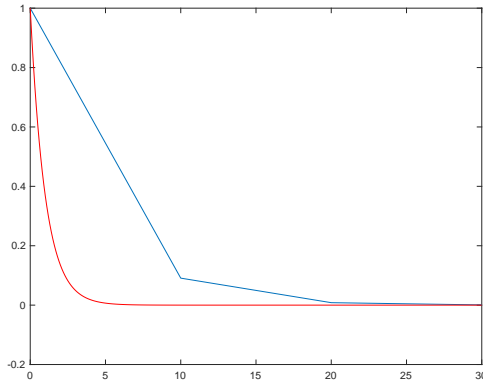
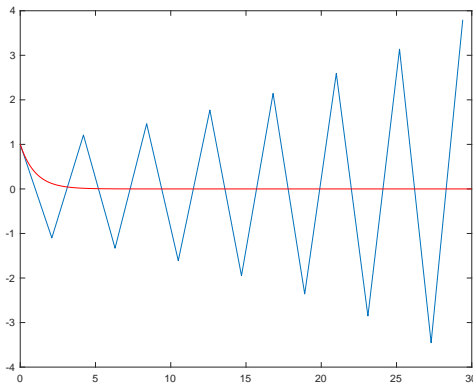


**Eksempel 5.21.** Vi kjører igjen på intervallet  $[0, 30]$ , men nå med  $h = 1.5$ . Den numeriske løsningen ser ut til å virre frem og tilbake en del før den sikter seg inn på rett spor.  $\Delta$



**Eksempel 5.22.** Intervallet  $[0, 30]$ , men nå med  $h = 2.1$ . Hva den numeriske løsningen tenker på, er ikke godt å si, men noe fornuftig er det ihvertfall ikke.  $\Delta$

**Eksempel 5.23.** Vi kan slå fast at eksplisitt Euler ikke fungerer, og det ser ut som om det går galt fordi  $h$  er for stor. Vi prøver Euler implisitt på samme intervall, men med  $h = 10$ . Det går riktig bra.  $\Delta$



Forklaringen på hva som skjedde her, er ganske enkel. Eulers eksplisitte metode er, for eksemplet vi har studert,

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i - hy_i \\ &= (1 - h)y_i \\ &= (1 - h)^2 y_{i-1} \\ &= (1 - h)^{i+1} y_0 = (1 - h)^{i+1}, \end{aligned}$$

med andre ord en geometrisk følge. Siden gymnaset har du visst at denne følgen divergerer dersom

$$|1 - h| \geq 1$$

og denne ulikheten blir innfridd akkurat i det  $h$  bikker 2. Kjører vi samme resonnetet på Euler implisitt, får vi

$$y_{i+1} = \frac{1}{(1 + h)^{i+1}}.$$

I vårt tilfelle er  $h > 0$ , så det må være klart at

$$0 < \frac{1}{(1 + h)^{i+1}} < 1,$$

og følgelig konvergerer følgen mot 0 for alle valg av  $h$ .

Analysen vi har gjort, kalles stabilitetsanalyse, og  $\dot{y} = -y$  er et såkalt testproblem. Vi får ikke eksakt informasjon om hvordan Eulers metode kommer til å oppføre seg for alle mulige differensiallikninger, men vi kan få en magesfølelse allikevel. Vi skal ikke gå inn på en lengre diskusjon om stabilitetsanalyse, som er et forskningsfelt i seg selv, men nevne at stabilitetsproblemer er som regel betydelige for eksplisitte metoder, og ikke-eksisterende for implisitte metoder.

**Eksempel 5.24.** Vi prøver Heuns metode på  $[0, 30]$ , med  $h = 3$ . Som du ser, går det ganske dårlig.  $\Delta$

**Eksempel 5.25.** Vi prøver RK4 på  $[0, 30]$ , med  $h = 2.1$ . Det går ikke noe bedre.  $\Delta$

## Mer om implisitte metoder

Så hvorfor bør vi ikke alltid bruke implisitte metoder? Det er et komplisert spørsmål å svare på, men vi skal gjøre et forsøk i dette avsnittet. Vi begynner med et eksempel, der vi setter opp de forskjellige numeriske metodene.

**Eksempel 5.26.** Vi skriver opp de forskjellige metodene for

$$\dot{y} = \frac{y - 2xy^2}{1 + x}.$$

Eksplisitt Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

Implisitt Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}$$

Trapesmetoden

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i} + \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}} \right)$$

Heuns metode

$$y_{i+1}^* = y_i + h \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left( \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i} + \frac{y_{i+1}^* - 2x_{i+1} (y_{i+1}^*)^2}{1 + x_{i+1}} \right)$$

$$k_1 = \frac{y_i - 2x_i y_i^2}{1 + x_i}$$

$$k_2 = \frac{\left(y_i + \frac{h}{2} k_1\right) - 2\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{h}{2} k_1\right)^2}{1 + \left(x_i + \frac{h}{2}\right)}$$

$$k_3 = \frac{\left(y_i + \frac{h}{2} k_2\right) - 2\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\left(y_i + \frac{h}{2} k_2\right)^2}{1 + \left(x_i + \frac{h}{2}\right)}$$

$$k_4 = \frac{\left(y_i + h k_3\right) - 2\left(x_i + h\right)\left(y_i + h k_3\right)^2}{1 + \left(x_i + h\right)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Jeg har for RK4 beholdt parentesene for å prøve å beholde den visuelle likhetene med de generelle likningene som definerer metoden. Men det er strengt tatt ikke nødvendig.  $\Delta$

I dette eksemplet kan  $y_{i+1}$  beregnes analytisk for de implisitte metodene, men merk at dette fort kan bli en smule håpløst om likningene ikke er kvadratiske i  $y_{i+1}$ , slik som her. Standardteknikken er da å slå til med en numerisk likningsløser.

Iterasjonen

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}$$

allerede er på formen  $y_{i+1} = g(y_{i+1})$ , og dette gjør at fikspunktiterasjonen er et pedagogisk naturlig valg. Dersom  $h$  er liten, blir gjerne  $g'$  liten, og da husker du fra tidligere at fikspunktmetoden konvergerer ganske kjapt. Men hele poenget med implisitte metoder, er jo nettopp å slippe å måtte bruke små  $h$ , så Newtons metode er et bedre valg. Jeg skal allikevel bruke fikspunktmetoden for å spare litt kognitiv last på dere.

**Eksempel 5.27.** Vi løser

$$\dot{y} = \frac{y - 2xy^2}{1 + x} \quad y(0) = \frac{2}{5}$$

med

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{y_{i+1} - 2x_{i+1} y_{i+1}^2}{1 + x_{i+1}}.$$

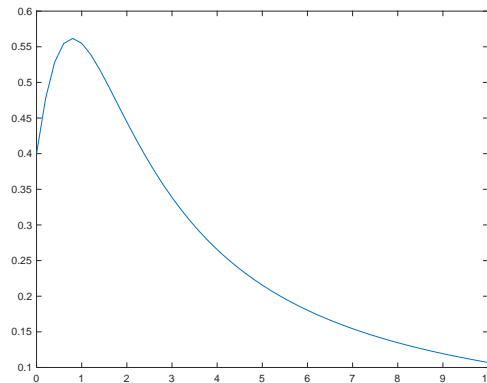
Under er løsningskurve beregnet med  $h = 0.2$  på intervallet  $[0, 10]$ . Fikspunktmetoden trengte med startgjetning  $y_i$  et sted mellom 13 og 21 iterasjoner for å nå maskinpresisjon i hvert steg. Med lavere  $h$  vil antall iterasjoner gå ned.  $\Delta$

Eksemplet over illustrerer et viktig moment. Koster det mange flyttallsoperasjoner å kjøre en metode til en gitt presisjon? Det hjelper ikke å ha en metode som beregner alt til maskinpresisjon om metoden tar ett år å kjøre. Implisitte metoder er ofte robuste og stabile, men de koster også mer å bruke.

## Vanskelig teori

Differensiallikningen vi skal løse er

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad t \in [a, b].$$



En løsning er en kontinuerlig deriverbar funksjon  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  som passer i likningen. Dersom vi inkluderer en betingelse på formen

$$y(a) = c$$

har vi et initialverdiproblem. Om dette problemet kan løses, og hvorvidt det finnes flere løsninger, avhenger av  $f$ .

### Entydighet

Dersom  $f$  er kontinuerlig deriverbar på  $\mathbb{R}$ , og  $y$  tilfredsstiller

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad y(a) = c,$$

er  $y$  entydig bestemt.

**Bevis.** La oss anta at det finnes to kontinuerlig deriverbare funksjoner  $y_1$  og  $y_2$  slik at

$$y_1' = f(y_1) \quad y_1(a) = c$$

og

$$y_2' = f(y_2) \quad y_2(a) = c.$$

Vi ønsker å studere differansen  $z = y_1 - y_2$ . Hvis vi trekker de to initialverdiproblemene over fra hverandre, ser vi at funksjonen  $z$  tilfredsstiller

$$z'(t) = \dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t) = f(y_1(t)) - f(y_2(t))$$

med initialverdi betingelse

$$z(a) = y_1(a) - y_2(a) = 0.$$

La oss først få rede på et par grunnleggende faktaopplysninger. Siden  $z$  er kontinuerlig deriverbar på  $[a, b]$ , må  $z$  ha maksimums- og minimumsverdier på  $[a, b]$ . La oss kalle disse  $c$  og  $d$ .

Siden  $f$  er kontinuerlig deriverbar, må  $|f'|$  ha en maksimumsverdi  $A$  på  $[c, d]$ . La nå  $P$  være en jevn partisjon med punkter

$$t_i = a + i \frac{b-a}{n},$$

og velg  $n$  slik at  $A \frac{b-a}{n} < 1$ . For det første gir sekantsetningen at

$$\left| \frac{f(y_1(t)) - f(y_2(t))}{y_1(t) - y_2(t)} \right| \leq A$$

på  $[a, b]$ , som gir at også

$$\begin{aligned} |z'(t)| &= |\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)| \\ &= |f(y_1(t)) - f(y_2(t))| \\ &< A|y_1(t) - y_2(t)| = A|z(t)| \end{aligned}$$

på  $[a, b]$ .

Nå ser vi på intervallet  $[a, t_1]$ . Siden  $z$  er kontinuerlig deriverbar, må både  $|z|$  og  $|z'|$  ha maksimumsverdier på dette intervallet. Vi kaller disse  $M_0$  og  $M_1$ , og ser at

$$|z(t)| \leq M_1(t_1 - a) = M_1 \frac{b - a}{n}$$

på  $[a, t_1]$  siden  $z(a) = 0$ . Men siden  $|z'(t)| \leq A|z(t)|$ , må  $M_1 \leq M_0 A$ , slik at

$$|z(t)| \leq M_1 \frac{b - a}{n} \leq M_0 A \frac{b - a}{n}.$$

Men vi har valgt  $n$  slik at

$$A \frac{b - a}{n} < 1.$$

Ulikheten

$$|z(t)| \leq M_0 A \frac{b - a}{n}$$

sier at på  $[a, t_1]$  er  $|z|$  mindre enn sin egen maksimumsverdi ganger et tall som er strengt mindre enn 1, og dette er kun mulig dersom  $z = 0$  på  $[a, t_1]$ . Altså er  $y_1$  og  $y_2$  identiske på  $[a, t_1]$ .

Men dette betyr at  $z(t_1) = 0$ , og nå kan vi gjenta resonnerementet på intervallet  $[t_1, t_2]$ , så på  $[t_2, t_3]$  og så videre, og konkludere med at  $y_1$  og  $y_2$  er identiske på hele  $[a, b]$ .  $\square$



# Oppgaver