TMA4101

Del I

Analyse

Kapittel 1

Aksiomer, tallmengder og vitenskap

I dette kapitlet skal vi ta for oss noen helt grunnleggende ting om matematikk som du mest sannsynlig ikke så noe til i skolen. Vitenskap handler om deduksjon, målbarhet, repeterbare eksperimenter, og falsifiserbare spådommer. I matematikk er vi så opptatt av deduksjon at vi har en tendens til å glemme de andre.

Et sted må vi begynne

All vitenskap har en ting til felles:

Et grunnleggende prinsipp

Det går ikke an å gjøre deduksjon uten å legge et eller annet til grunn.

Det er nødvendig gjøre noen grunnleggende antagelser for å komme igang. Disse antagelsene har litt forskjellig navn, alt etter fagfelt - i matematikk kalles de aksiomer, og fysikerne sier postulat. I dagligtale snakker man om premisser som ligger til grunn for en diskusjon, og når man er litt usikker på noe, jobber man gjerne under en midlertidig arbeidshypotese.

Felles for begrepene antagelse, aksiom, postulat, premiss og hypotese, er at de alle er synonomer for fundamentet man kan gjøre deduksjon på. Man utsetter inntil videre spørsmålet om fundamentet er trygt å bygge noe på, og studerer heller de logiske konsekvensene av antagelsene.

Eksempel 1.1. Den spesielle relativitetsteorien postulerer at

1. Fysikkens lover er identiske i alle inertialsystemer.
2. Lysets hastighet i vakuum er den samme i alle intertialsystemer.

Dette høres selvfølgelig helt sykt ut, men fysiske eksperimenter bekrefter at det er sånn verden er skrudd sammen. △

Eksempel 1.2. Darwins postulater for evolusjon går som følger:

1. Det er variasjon mellom individer i en art.
2. Noen av disse variasjonene videreføres til avkom.
3. Det fødes mer avkom enn det er plass til.
4. Det avkommet som tilfeldigvis er best tilpasset omgivelsen har et konkurransefortrinn, og produserer mer avkom som selv overlever til reproduktiv alder.

Konsekvensene av disse postulatene er at arter vil tilpasse seg omgivelsene over tid, og omvendt. Darwin tilbrakte tid på Galapagos, og oppdaget at halsen på skilpaddene der så ut til å være formet etter vegetasjonen på øyen skilpadden kom fra. △

Når man har studert disse konsekvense tilstrekkelig, formulerer man en spådom som kan testes, og hvis spådommen ikke treffer, må man revurdere fundamentet.

Eksempel 1.3. Første Mosebok postulerer at jorden er omtrent seks tusen år gammel. Hvis dette er sant, så er det noe galt med vår forståelse av grunnstoffet karbon.

Karbon forekommer i tre isotoper som kalles C-12, C-13 og C-14. Alle har en atomkjerne som inneholder seks protoner, men kjernen kan i tillegg inneholde seks, syv eller åtte nøytroner. C-14 er et ustabilt isotop, og halveringstiden er på omtrent 5700 år. Men andelen C-14 i atmosfæren ligger allikevel (på grunn av kosmisk stråling og et par atombombeprøvesprengninger) stabilt på omtrent ett atom per 10^{12}.

Siden du puster, utveksler du hele tiden karbon med atmosfæren, og derfor er andelen C-14 i kroppen din og i atmosfæren omtrent den samme. Men når du dør, blir du avskåret fra denne utveksliingen, og etter 5700 år vil C-14-andelen i kroppen din være omtrent halvert. Siden vi har fossiler av levende vesener som har vesentlig lavere C-14-andel enn femti prosent, må jorden antakelig være mye eldre enn 6000 år.

Med andre ord: om du tror at jorden er 6000 år gammel, kan du ikke samtidig tro på fysikk. Du er pent nødt til å velge en av dem. △

I dette kapitlet skal vi sette opp aksiomer for mange ting. Det er ikke sikkert at akkurat du trenger å kunne alle disse aksiomene for å sende en rakett til månen eller bygge en oscillator, men vi tar det med fordi det er en viktig del av det vitenskapelige paradigmet vårt.

Litt mengdelære

Det er greit å vite for og bak på mengdesymbolene. En mengde er en samling med ting, kalt elementer. I matematikk er elementene som regel tall, mens i sannsynlighetsregning er elementene utfall. Vi kan også ha en punktmengde i planet eller i rommet, en sirkelskive eller et kuleskall, eller noe helt annet. For eksempel er

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

en mengde med fem elementer, og

$$B = \{1, 3, 5, \pi\}$$

en mengde med fire elementer.

Vi kan sette sammen mengder til nye mengder. To vanlige operasjoner på mengder, er union:

$$\cup$$

og snitt:

$$\cap$$

Unionen mellom to mengder er en ny mengde som inneholder alle elementer som er enten den ene eller den andre mengden:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \pi\}$$

mens snitt er en ny mengde som inneholder de elementene som er i begge mengder:

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

Dersom alle elementer i en mengde A er inneholdt i en større mengde B, skriver vi

$$A \subset B.$$

Dette er det samme som å si at

$$A \cap B = A.$$

Vi skriver

$$A - B$$

for mengden av alle elementer som er i A, men ikke i B, og

$$\overline{A}$$

for alle elementer som ikke er i A. Vi skriver

$$A \subset B$$

dersom alle elementene i A også er i B, og

$$A \subseteq B$$

dersom enten $A \subset B$ eller $A = B$.

Definisjon. En ordnet mengde er en mengde der det finnes en relasjon $<$ slik at

- kun en av

  $$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

  gjelder
- dersom $x < y$ og $y < z$ er $x < z$

En ordnet mengde $A \subset B$ er begrenset ovenfra dersom det finnes $y \in B$ slik at $x \leq y$ for alle $x \in A$. Vi sier at y er en øvre skranke. Dersom ingen $z < y$ er en øvre skranke for A, kalles y en minste øvre skranke.

Det finnes naturligvis aksiomer for mengdelære, men de er veldig kompliserte. Det er likevel på sin plass å tipse om at statistikk og sannsynlighetsregning blir veldig mye enklere å forstå om man er komfortabel med mengdelære. Les [?] om du er interessert.

Noen viktige tallmengder

En tallmengde er en mengde med tilhørende operasjoner for å kombinere elementer til nye elementer. Tallmengder har antagelig eksistert lengre enn skriftsystemer. De første rudimentære skriftsystemer oppsto i forbindelse med handelsbokføring i Mesopotamia for litt over fem tusen år siden. Streker ble skrevet med en butt penn for å holde styr på antall, mens andre symboler (kalt piktografer, og skrevet med skarpere penn), ble funnet opp for det vi idag kaller substantiv - korn, øltønner, fisk, og så videre. Idag dominerer tall omgivelsene våre. Dersom du løfter blikket fra denne teksten, er det ikke en eneste ting du ser hvis konstruksjon eller drift ikke involverer tall på et eller annet vis, enten det er radaren til flyet du sitter i, eller bredden på panelet på hytteveggen. Bokstavene i denne teksten er nummerert for at datamaskinen din skal klare å holde styr på dem.

Vi skal møte fem forskjellige tallmengder:

- De naturlige tallene $\mathbb{N}$
- De hele tallene $\mathbb{Z}$
- De rasjonale tallene $\mathbb{Q}$
- De reelle tallene $\mathbb{R}$
- De komplekse tallene $\mathbb{C}$

De fire første er du mest sannsynlig kjent med fra før. De relle tallene er temmelig hårete å definere presist. Vi skal ikke gjøre det, men nøye oss med å forklare hvorfor de rasjonale tallene ikke er tilstrekkelige - de mangler noen viktige tall. Det femte tallmengdet, de komplekse tallene, skal vi bare så vidt smake på i dette semesteret. For disse fem tallmengdene gjelder at

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Det finnes en fjerde tallmengde som noen av dere kanskje skal innom før eller siden. W. D. Hamilton fant i 1843 opp kvaternionene, som er en slags utvidelse av de komplekse tallene, og den ytterste tallmengden i boksen over. De består i at man utvider med to nye imaginære enheter j og k, definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inksripsjonen er dessverre vekk. Kvaternioner er godt egnet til å holde styr på et legemes orientering i rommet, så dersom du bytter til kyb og skal jobbe med satelitter, vil du før eller siden få bruk for disse.

De tre tallmengdene $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er eksempler på noe som kalles kropp. En kropp er et tallmengde med to operasjoner, addisjon ($+$) og og mutliplikasjon ($\cdot$). Det er vanlig å sløyfe gangetegnet, og skrive

$$x \cdot y = xy.$$

La F være en kropp. [1] Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for addisjon:

1 F er lukket under addisjon:
$x, y \in F \quad \Longrightarrow \quad x + y \in F$

2 Addisjonen er assositativ:
$(x + y) + z = x + (y + z)$

3 Addisjonen er kommutativ:
$x + y = y + x$

4 Additiv identitet:
Det finnes et element 0 slik at $x + 0 = x$

5 Additiv invers:
For hver x finnes et element y slik at $x + y = 0$

Det additive inverselement til x skrives $-x$. Følgende aksiomer skal være tilfredsstilt for multiplikasjon:

6 F er lukket under multiplikasjon:
$x, y \in F \quad \Longrightarrow \quad x \cdot y \in F.$

7 Mutliplikasjonen er assositativ:
$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

8 Multiplikasjonen er kommutativ:
$x \cdot y = y \cdot x.$

9 Multiplikativ identitet:
Det finnes et elelement 1 slik at $1 \cdot x = x.$

10 Multiplikativ invers:
For hver $x \neq 0$ finnes et element y slik at $x \cdot y = 1.$

Det additive inverselement til x skrives $1/x$ eller $\frac{1}{x}$. Til slutt er det et aksiom for rekkefølgen på regneoperasjonene.

11 Operasjonene er distributive:
$(x + y) \cdot z = xz + yz.$

Fra disse aksiomene kan alt vi trenger utledes. Merk at 0 er sin egen additive invers.

Eksempel 1.4. Hvis du går på fest og sier du er matematiker, spør folk gjerne "hvorfor er $(-1) \cdot (-1) = 1$, egentlig?" Merk først at

$$y \cdot x = y \cdot (x + 0) = y \cdot x + y \cdot 0$$

Dersom vi legger til $-y \cdot x$ på begge sider, står vi igjen med

$$0 = y \cdot 0,$$

så det at null ganger noe må være null, følger av aksiomene. Vi kan så bruke at

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (-1) \\ &= (1 - 1) \cdot (-1) \\ &= 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= -1 + (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

og konkludere med at -1 og $(-1) \cdot (-1)$ må summere til null. Altså er de hverandres additive invers, og derfor må $(-1) \cdot (-1) = 1$. △

Eksempel 1.5. Du opererer med et tallmengde basert på $\mathbb{Z}$ når du ser på klokken. Dersom klokken er ti om morgenen, og du skal gå hjem fra gløs om syv timer, får du det relevante klokkeslettet ved å regne ut

$$10 + 7 = 5.$$

Dette kalles klokkearitmetikk, og tallmengdet heter $\mathbb{Z}_{12}$. Dette er ikke en kropp, men $\mathbb{Z}_n$ er dersom n er et primtall. Den minste kroppen er $\mathbb{Z}_2$, og den har kun elementene 0 og 1. △

Definisjon. En ordnet kropp er en kropp som er en ordnet mengde og i tillegg tilfredsstiller

- $x + y < x + z$ når $y < z$
- $xy > 0$ når $x > 0$ og $y > 0$

Naturlige tall

Havørnen kan telle til tre. Johan Willgohs, zoolog og pioner innen rovfuglvern, oppdaget på sekstitallet at dersom havørnen observerte en, to eller tre mennesker gå inn i et observasjonstelt i nærheten av redet sitt, fór den derifra, betraktet teltet fra lang avstand, og kom ikke tilbake til redet før den hadde observert det samme antall mennesker forlate teltet. Hvis derimot fire mennesker gikk inn i teltet, gikk havørnen i surr, og vendte tilbake så snart den hadde sett tre mennesker forlate teltet. Dette kunne man utnytte til å lure havørnen, slik at man fikk observert den.

De naturlige tallene består av de tallene du bruker når du teller:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$$

$\mathbb{N}$ er en ordnet mengde, men ikke en kropp, for alle elementer i dette tallmengden mangler additiv invers, og de aller fleste mangler multiplikativ invers. Dette er de tallene havørnen kan litt om, og spørsmålet om når de oppsto, er ikke så godt å svare på, for levende vesener har nok brukt de første elementene i dette systemet siden lenge før H. Sapiens så dagens lys for omtrent 300000 år siden. Vi er den eneste gjenlevende arten i vår genus ("Homo"), og noen av de andre artene (for eksempel H. neanderthalensis eller H. florensienis) har antagelig hatt høyt utviklede hjerner (neandertalerne hadde større hjerner enn oss), men ikke vårt velutviklede strupehode. Derfor har de ikke kunnet kommunisere like presist som vi gjør, og følgelig har vi vært i stand til å utrydde dem, slik vi har gjort med så og si all megafauna utenfor det afrikanske kontinentet.

[1] Kropp heter 'field' på engelsk. En artigere oversettelse ville kanskje vært 'felt', 'åker', 'eng', eller 'bane'.

Når David Attenborough i sin 13-episoders BBC-klassiker "Life on Earth" besøker hittil ukontaktede stammefolk på Papua Ny Guinea, filmes det når de forklarer hvordan de teller. De bruker fingrene på venstre hånd for en til og med fem, og så legger de høyre pekefinger på forskjellige steder på venstre arm for tall over dette - håndleddet betyr seks, underarmen syv, albuen åtte, øverst på biceps ni, skulder ti, og midt på halsen elleve.

Et primtall er et tall som kun er delelig med 1 og seg selv, og som er større enn eller lik 2. En fun fact som er grei å kjenne til, er

Aritmetikkens fundamentalteorem

Alle hele tall kan faktoriseres i primtall på en entydig måte.

Det er fornuftig å definere at 1 ikke er et primtall, for ellers hadde ikke dette vært sant. Det er også mulig å bytte om på faktorenes orden, men dette ser vi åpenbart vekk fra.

Eksempel 1.6. $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ △

Eksempel 1.7. $51 = 3 \cdot 17$ △

Eksempel 1.8. $78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$ △

Eksempel 1.9. $91354 = 2 \cdot 45677$ △

Hele tall

Det er ofte slik at nye tallmengder lages dersom man mangler noen tall i det tallmengdet man har. De hele tallene

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2...\}$$

er et godt eksempel på dette. De er ikke så gamle, og oppsto i forbindelse med løsning av polynomlikninger. Akkurat som $\mathbb{N}$, er $\mathbb{Z}$ ordnet, men ikke en kropp, for de aller fleste elementene mangler multiplikativ invers.

Rasjonale tall

De rasjonale tallene, $\mathbb{Q}$, altså alle brøker

$$\frac{m}{n}$$

der m og n er hele tall, er mye eldre enn de hele tallene. Å dele tre epler likt mellom fem mennesker har nok vært en problemstilling lenge før skriftsystemer oppsto. Denne tallmengden er en ordnet kropp, men har noen alvorlige defekter. Det mangler noen viktige tall!

Eksempel 1.10. Det finnes ingen hele tall slik at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Dette kan vi bevise som følger. Anta at det finnes hele tall m og n slik at likningen over holder. Vi kan anta at m og n ikke har noen felles faktorer, for hvis de hadde hatt det, kunne vi bare forkortet brøken til de ikke lenger hadde det. Vi ganger nå hele likningen med n, og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, på da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n. △

Reelle tall

Men $\sqrt{2}$ burde definitivt være et tall, siden det er diagonalen i et kvadrat med sidekant 1. Men i $\mathbb{Q}$ finnes det altså ikke noe tall for denne lengden. Georg Cantor publiserte den første ordentlige definisjonen av $\mathbb{R}$ de reelle tallene i 1871. Dette er en ganske komplisert konstruksjon, og det er på sin plass med et sitat fra Walter Rudins klassiker fra 1953, "Principles of Mathematical Analysis":

> " Experience has convinced me that it is pedagogically unsound (though logically correct) to start off with the construction of the real numbers from the rational ones. "

Med andre ord skal vi la den formelle konstruksjonen ligge i fred, og heller prøve å forklare med hva de reelle tallene har som de rasjonale mangler.

Teorem 1.11. Alle øvre begrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke. Alle nedre begrensede delmengder av $\mathbb{R}$ har en største nedre skranke.

Eksempel 1.12. Vi studerer mengden av alle tall r slik at $r^2 < 2$. La oss kalle mengden A. Denne mengden har ikke noe største element, dersom du tar et tilfeldig element r i mengden, og danner

$$q = \frac{2r + 2}{r + 2}$$

så vil $r^2 < q^2 < 2$. Men A har derimot en minste øvre skranke, nemlig $\sqrt{2}$. Alle $r \in A$ er mindre enn $\sqrt{2}$, og det finnes ingen tall under $\sqrt{2}$ som er større enn alle $r \in A$. △

Eksempel 1.13. Vi studerer mengden av alle rasjonale tall p slik at $p^2 < 2$. Denne mengden har likeledes ikke noe største element, Men mengden har heller ingen minste øvre skranke, for $\sqrt{2}$ er ikke et rasjonalt tall. Alle rasjonale tall større enn $\sqrt{2}$ er en øvre skranke for mengden, og uansett hvilken øvre skranke man velger, er det mulig å finne en øvre skranke som er mindre. △

Dersom $a < b$, skriver vi

$$(a, b)$$

for mengden av alle tall større enn a og mindre enn b. Dette kalles et åpent intervall. Vi skriver

$$[a, b]$$

for mengden av alle tall større enn eller lik a og mindre enn eller lik b. Dette kalles et lukket intervall.

Komplekse tall

De komplekse tallene, $\mathbb{C}$, er et tallmengde som i likhet med negative tall oppsto i forbindelse med løsning av polynomlikninger. Likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

har ingen løsning blant noen av de foregående tallmengdene, og derfor har man kommet til at det er best å definere et helt nytt tall i, som har egenskapen at

$$i^2 = -1.$$

Tallet i kalles den den imaginære enheten. Det kunne vært fristende å 'løse' likningen $x^2 + 1 = 0$ for x, og definere

$$i = \sqrt{-1}.$$

Men vi må være litt forsiktige med denne strategien. Regneregelen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

gjelder ikke når både a og b er negative tall. Dette vises av følgende klassiske eksempel:

$$\begin{aligned} 1 &= (-1) \cdot (-1) \\ &= \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i^2 = -1. \end{aligned}$$

Men vi kan allikevel tillate oss å bruke det nye tallet i til å skrive kvadratroten av negative tall på en pen måte:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{(-1)} = \pm 2i.$$

Eksempel 1.14. Løser vi likningen

$$x^2 + x + 1 = 0$$

gir annengradsformelen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

at

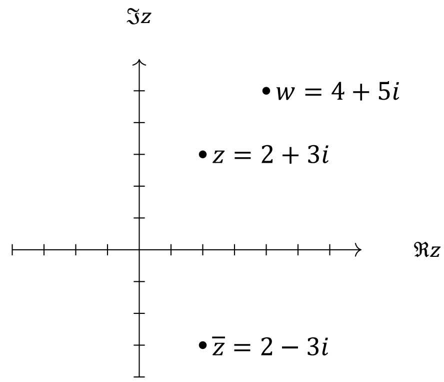
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \qquad \triangle$$

Eksemplet over inspirerer oss til å definere komplekse tall som

$$z = a + bi.$$

Her er a og b reelle tall. De kalles henholdsvis realdelen og imaginærdelen til z, og skrives gjerne $\Re z$ og $\Im z$. Mengden av alle komplekse tall skrives $\mathbb{C}$. De reelle tallene er en delmengde av de komplekse tallene,for dersom $b = 0$, er z reell.

Et komplekst tall har en viss ytre likhet med vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vi kan tenke at realdelen a og imaginærdelen b er komponenter i en vektor, og avmerke z i det komplekse planet.



Det komplekse planet

La $z = a + bi$ og $w = c + di$ være komplekse tall. Regneregler for komplekse tall følger regnereglene for reelle tall, men du må huske at $i^2 = -1$:

$$z + w = a + c + (b + d)i$$

$$z - w = a - c + (b - d)i$$

$$z \cdot w = ac - bd + (bc + ad)i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

De to første er trivielle. Vi beviser gangeregelen:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (bc + ad)i \end{aligned}$$

og deleregelen:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} \\ &= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Komplekse tall legges altså sammen komponentvis akkurat som vektorer i $\mathbb{R}^2$. Multiplikasjon og divisjon har ingen tilsvarende operasjoner i $\mathbb{R}^2$ i 'vanlig bruk'.

Eksempel 1.15. La $z = 2 + 3i$ og $w = 4 + 5i$.

$$z + w = 2 + 4 + (3 + 5)i = 6 + 8i$$

$$z - w = 2 - 4 + (3 - 5)i = -2 - 2i$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (2 + 3i) \cdot (4 + 5i) \\ &= 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4i + 2 \cdot 5i + 3 \cdot 5i^2 \\ &= 8 - 15 + (12 + 10)i = -7 + 22i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 + 3i}{4 + 5i} = \frac{2 + 3i}{4 + 5i} \cdot \frac{4 - 5i}{4 - 5i} \\ &= \frac{8 + 15 + (12 - 10)i}{16 + 25} = \frac{22}{41} + \frac{2}{41} i. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Når vi deler et komplekst tall på $z = a + bi$, ganger vi oppe og nede med z konjugert:

$$\bar{z} = a - bi$$

Her er et par regneregler:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \qquad \overline{z / w} = \bar{z} / \bar{w}$$

Merk til slutt at $z\bar{z} = a^2 + b^2$ er et reelt tall. Dette tallet er avstanden fra z til origo, kalles gjerne modulus eller absoluttverdien til z, og skrives $|z|$. Kroppen $\mathbb{C}$ er såkalt algebraisk lukket. Det betyr at alle polynomlikninger har en løsning i $\mathbb{C}$.

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

Oppgaver

1. Finn alle løsninger av likningen

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

2. Faktoriser polynomet $x^2 + 2x + 2$.

3. Vis at $\sqrt{3}$ ikke kan skrives som en brøk.

4. Vis at $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

5. Utled regnereglene

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \qquad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$$
$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \qquad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$$

(De er ikke så vanskelige, bare skriv $z = a + bi$ og ta det derfra.)

6. Gå i en lærebok om diskret matematikk og finn aksiomene for Boolsk algebra. Vis at $x + x = x$ og at $xx = x$.

7. I totallssystemet ønsker vi å skrive tall som en sum av toerpotenser:

$$x = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 2^0$$

Koeffisientene a_k kan være 0 eller 1, og kalles de binære sifrene. Det finnes 10 typer personer i verden. De som skjønner totallssystemet, og de som ikke gjør det.

Skriv tallene 31, 127, 346 og 1025 i totallssystemet.

Bibliografi

[1] Halmos, Paul R.
Naive Set Theory
Springer-Verlag New York 1974

[2] Rudin, Walter
Principles of Mathematical Analysis, 3. utgave
McGraw Hill, 1976

Kapittel 2

Funksjoner

En funksjon $f : A \to B$ er en regel som for hvert element i mengden A tilordner ett (og bare ett) element i mengden B. Vi skriver $y = f(x)$ for å signalisere at $y \in B$ er elementet som korresponderer til $x \in A$. Mengden A kalles definisjonsmengden. mens B kalles verdimengden. De elementene i B som faktisk er verdier til funksjonen f, skrives $f(A)$, og kalles bildet til f. Vi snakker gjerne om en funksjon 'på A', og vi kan ha $f(A) \subset B$ eller $f(A) = B$.

Så og si all matematikk du skal lære de neste to årene, handler om funksjoner. Vanligvis beskriver vi funksjoner ved å bruke en matematiske likninger, men funksjoner kan også beskrives ved en tabell eller en graf. Hovedpoenget er at ett og bare ett element i B skal spesifiseres for hvert element i A.

Eksempel 2.1. Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x^2$$

tar inn et reelt tall og kvadrerer det. △

Eksempel 2.2. Funksjonen $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ gitt ved

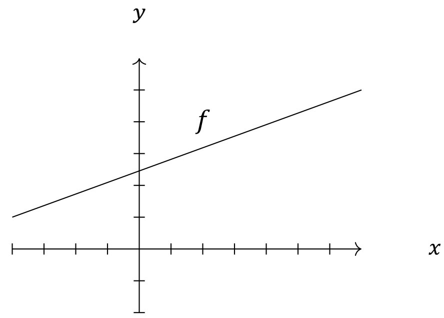
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tar inn et reelt tall og inverterer det. Det er ikke lov å dele på null, og derfor må denne lukes ut av definisjonsmengden. △

Det er korrekt å bruke ordet funksjon om f, men ordet funksjonsverdi om $f(x)$, og en funksjon er ikke ordentlig definert før både definisjonsmengden og regelen er definert. Men vi fraviker av og til fra dette. Dersom ikke definisjonsmengden er eksplisitt definert, er det gjerne underforstått hva den er (som regel $\mathbb{R}$). Det hender vi bruker teknisk gale uttrykksmåter, som 'funksjonen $f(x)$', men dette er for å slippe å bruke så mange ord.

Eksempel 2.3. Funksjonen $f(x) = \frac{1}{x}$ tar inn et reelt tall og inverterer det. Nå er det underforstått at definisjonsmengden er $\mathbb{R} - \{0\}$. △

Eksempel 2.4. Koordinatsystemet vi bruker i dag, med x- og y-aksen, kalles det kartesiske koordinatsystem, etter Rene Descartes, som innførte det i en bok i 1637. En funksjon kan beskrives av en graf i et koordinatsystem, men det er noen føringer på hvordan grafen kan se ut. Siden det kun skal være en funksjonsverdi for hvert element i definisjonsmengden, kan ikke grafen skjære en gitt vertikal linje mer enn en gang. △



Eksempel 2.5. Et polynom av orden n er en funksjon $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med funksjonsuttrykk

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Studiet av polynomer er et av de eldste i matematikkens historie, antagelig noen tusen år gammelt. René Descartes oppfant standardnotasjonen vi bruker i dag, med koeffisienter hentet fra begynnelsen av alfabetet, og variable fra slutten av alfabetet. Polynomer er enkle å arbeide med av mange forskjellige grunner. △

Eksempel 2.6. Funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved

$$f(n) = n! = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2$$

vokser fryktelig fort med n. Vi skal få bruk for denne funksjonen flere ganger dette semesteret. △

I noen tilfeller kan det la seg gjøre å skrive om likningen $y = f(x)$ til $x = g(y)$.

> **Definisjon.** En funksjon $f : A \to B$ er injektiv dersom $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer at $x_1 = x_2$.

Dersom $f : A \to B$ er injektiv, kan vi alltid løse likningen $y = f(x)$ for x. Da får vi en likning på formen $x = g(y)$. Funksjonen $g : B \to A$ kalles den inverse funksjonen, og vi skriver

$$g = f^{-1}.$$

Dersom vi setter g inn i f eller f inn i g, får vi

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x.$$

Dersom f ikke er injektiv, finnes det $x_1 \neq x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Hvis det fantes en invers funksjon g, ville denne måttet ta både x_1 og x_2 som funksjonsverdier i $f(x_1) = f(x_2)$. Dette er ikke lov, og følgelig kan ikke g eksistere.

Eksempel 2.7. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^3.$$

Da er

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}. \qquad \triangle$$

Eksempel 2.8. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2.$$

Denne funksjonen har ingen invers. Den er ikke injektiv, for $f(-x) = f(x)$. $\triangle$

Eksempel 2.9. La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Denne funksjonen har ingen invers. Den er ikke injektiv, for $f(-x) = f(x)$ for alle x. $\triangle$

Hvorvidt f injektiv, avhenger både av funksjonsuttrykket og definisjonsmengden.

Eksempel 2.10. La $f : [0,1] \to [1,2]$ være gitt ved

$$f(x) = x^2 + 1.$$

Denne funksjonen har den inverse funksjonen $g : [1,2] \to [0,1]$ gitt ved

$$g(x) = \sqrt{x-1}. \qquad \triangle$$

Oppgaver

8. Skisser funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2,$$

og avgjør om den er injektiv og/eller surjektiv.

9. Funksjonen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.

10. Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = e^x$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.

11. Funksjonen $f : A \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sin x$$

er injektiv om du velger A med omhu. Velg en passende A og finn og skisser den inverse funksjonen.

Kapittel 3

Funksjoner på $\mathbb{N}$

Dette temaet kalles som regel følger og rekker.

Følger

Definisjon. En følge er en funksjon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Verdiene $f(n)$ kalles leddene i følgen.

Det er vanlig å skrive $f(n) = a_n$. Du kan visualisere en følge som en en uendelig lang tabell:

n	1	2	3	...
f(n)	f(1)	f(2)	f(3)	...

Eksempel 3.1. Den enkleste følgen er kanskje de naturlige tallene:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Her er funksjonen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt ved

$$f(n) = n.$$

△

Eksempel 3.2. En følge vi skal bli godt kjent med, er følgen gitt ved

$$f(n) = \frac{1}{n}.$$

△

Eksempel 3.3. En annen følge vi skal bli godt kjent med, er følgen gitt ved

$$f(n) = \frac{1}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2}.$$

△

Noen ganger har vi ikke umiddelbar tilgang på uttrykket som beskriver følgen som en funksjon på $\mathbb{N}$. Et uttrykk der et ledd i følgen i stedet er definert som en funksjon av foregående ledd, kalles en rekursjon.

Eksempel 3.4. Fibonaccitallene

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...\}$$

er gitt ved rekursjonen

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2),$$

og startverdiene $f(1) = f(2) = 1$. △

Eksempel 3.5. Følgen av primtall

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$$

har ingen kjent formel. Det er ikke så vanskelig å se at det finnes uendelig mange primtall, men det er ikke pensum i dette emnet. △

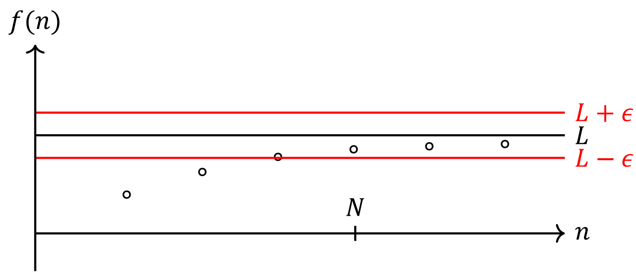
Primtallsfølgen i forrige eksempel går mot uendelig, siden det er uendelig mange primtall, og de blir større og større utover i følgen. Leddene i følgen $f(n) = 1/n$ går mot null. Vi skal nå definere hva vi mener med at en følge 'går mot' noe.

Definisjon. En følge sies å konvergere mot L dersom det for en hver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at

$$n \geq N \implies |f(n) - L| < \epsilon$$

En følge som konvergerer, sies å være konvergent. I motsatt fall er følgen divergent.

Det er underforstått i forrige definisjon at vi først og fremst er interessert i små ϵ. Uansett hvor liten ϵ man velger, er det bare å gå langt nok ut i følgen, og så vil alle etterfølgende ledd ligge og vake i en avstand fra L som aldri blir større enn ϵ.



Eksempel 3.6. Følgen $f(n) = 1/n$ går mot null. Hvordan ser vi det? Hvis du velger $\epsilon = 0.1$, kan vi velge $N \geq 11$, slik at $f(n) < 0.1$. Hvis du velger $\epsilon = 0.05$, må $N \geq 21$, slik at $f(n) < 0.05$. Poenget er nå at uansett hvor liten ϵ som velges, kan vi alltid finne N slik at $f(n) < \epsilon$ når $n > N$, og derfor kan vi si at

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

△

En følge kan ikke konvergere mot to forskjellige grenseverdier.

Teorem 3.7. En grenseverdi, dersom den eksisterer, er entydig.

Bevis. Anta vi har to grenseverdier $L_1 \neq L_2$. Velg $\epsilon < |L_1 - L_2|$, og N_1 slik at

$$|f(n) - L_1| < \epsilon/2$$

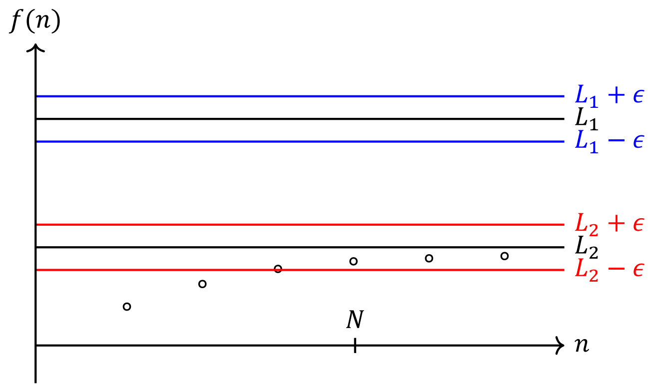
dersom $n > N_1$. Men vi kan også velge N_2 slik at

$$|f(n) - L_2| < \epsilon/2,$$

og tar vi den største av N_1 og N_2, er begge ulikhetene oppfylt. Men nå er

$$\begin{aligned}|L_1 - L_2| = |L_1 - f(n) - L_2 + f(n)| \leq \\ |L_1 - f(n)| + |L_2 - f(n)| < \\ \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

Dette er en selvmotsigelse, for her står det at uansett hvor liten ϵ er, må avstanden mellom L_1 og L_2 være mindre. Siden ϵ er vilkårlig, kan det ikke stemme at $L_1 \neq L_2$, og vi må ha $L_1 = L_2$. En titt på figuren under kan være til hjelp. □



Vi tar med noen regneregler for grenseverdier.

Teorem 3.8. Anta vi har to følger f og g, med

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} g(n) = L_2$$

og la c være et tall. Da gjelder at

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n) + g(n) &= L_1 + L_2 \\ \lim_{n\to\infty} cf(n) &= cL_1 \\ \lim_{n\to\infty} f(n)g(n) &= L_1L_2 \\ \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) &= L_1/L_2 \quad (L_2 \neq 0)\end{aligned}$$

Bevis. Vi beviser den første. Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|f(n) + g(n) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned}|f(n) + g(n) - L_1 - L_2| = \\ |f(n) - L_1 + g(n) - L_2| \leq \\ |f(n) - L_1| + |g(n) - L_2|\end{aligned}$$

Siden f konvergerer mot L_1, og g mot L_2, kan vi velge N slik at $n > N$ impliserer

$$|f(n) - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|g(n) - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $n < N$ at

$$|f(n) - L_1 + g(n) - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise. De andre reglene bevises på liknende måte, men det er litt mer regning. □

En spesiell type følger er veldig greie å jobbe med.

Definisjon. En følge sies å være monoton dersom $f(n+1) \geq f(n)$ eller $f(n+1) \leq f(n)$ for alle n, og begrenset dersom $|f(n)| \leq L$ for alle n.

Dette skyldes følgende teorem. Vi tar med beviset, for dette er en illustrasjon av minste-øvre-skrankeegenskapen. Hvis ingen hadde tatt bryet med å konstruere de reelle tallene ordentlig, hadde teoremet ikke vært sant.

Teorem 3.9. En monoton og begrenset følge er konvergent.

Bevis. Anta følgen er monotont stigende, og at verdimengden til f er begrenset ovenfra. Verdimengden til f har en minste øvre skranke L. Velg $\epsilon > 0$. For en eller annen N er $f(N) > L - \epsilon$, for ellers er ikke L minste øvre skranke til verdimengden til f. Dersom $n > N$, er også

$$f(n) > L - \epsilon$$

siden f er monotont stigende. Siden $f(n) > L - \epsilon$ for alle $n > N$, konvergerer følgen til L. □

Definisjon. Vi sier at en følge er en cauchyfølge dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes N slik at $m, n \geq N$ impliserer

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Cauchyfølger kan faktisk brukes til å konstruere den reelle tallinjen. Dette er altfor komplisert for oss, men følgende fun fact kan være grei å kjenne til.

Teorem 3.10. En cauchyfølge konvergerer alltid mot noe i $\mathbb{R}$.

Eksempel 3.11. Det er lett å se at den rekursive følgen gitt ved $x_0 = 1$ og

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

er rasjonal, altså at $x_n \in \mathbb{Q}$ for alle n. Dette er ikke så lett å se (vi skal se på det senere) at følgen konvergerer mot $\sqrt{2}$, som er irrasjonalt. △

Rekker

Ingen lærebok i matematikk begynner et kapittel om rekker uten Xenos paradoks, som er rundt 2500 år gammelt. Anta at en langdistanseløper skal tilbake legge en distanse. Han tilbakelegger første halvdel på tiden T. Den neste fjerdedelen tibakelegger han på tiden $T/2$. Den neste åttendedelen tilbakelegger han på tiden $T/4$. Og slik fortsetter det.

Xeno trodde han hadde funnet et paradoks her, for han trodde at

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = \infty$$

siden venstresiden er en sum av uendelig mange tall. Dette er ikke riktig. Det er åpenbart at løperen tilbakelegger distansen på tiden $2T$, og dersom man skal tillegge en den uendelige summen over noen verdi, er det naturlig å sette

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} + \cdots = 2T.$$

> Definisjon. En rekke er summen av leddene i en følge. Vi skriver
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$
>
> Uttrykket
>
> $$S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$$
>
> kalles den N-te partialsummen. Vi sier at en rekke konvergerer dersom partialsummene danner en konvergent følge.

Dersom Xeno hadde lest eksemplet under, hadde han skjønt at han var på villspor.

Eksempel 3.12. La $|x| < 1$. På skolen har du lært om den geometriske rekken

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Det er ikke så vanskelig å se at dette er riktig. Partialsummene er

$$S_N = \sum_{n=0}^{n} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N,$$

og hvis vi tar

$$\begin{aligned}(1-x)S_N &= (1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^N \\ &- (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{N+1}) = 1 - x^{N+1}\end{aligned}$$

får vi

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}.$$

Dersom vi nå lar $N \to \infty$, får vi

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \qquad \triangle$$

Eksempel 3.13. Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$$

er veldig lett å analysere. Merk at

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

slik at

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots = 1.\end{aligned}$$

Dette kan minne litt om en teleskopfiskestang, og kalles derfor en teleskoperende rekke. $\triangle$

> Teorem 3.14. Dersom
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$
>
> er konvergent, må
>
> $$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0.$$

Den motsatte implikasjonen er ikke sann, for rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er divergent.

Eksempel 3.15. La oss ta en titt på rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Vi kan lett vise at denne rekken divergerer ved å bruke et lite triks. Siden

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

og

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

og så videre, må vi ha

$$\sum_{n=1}^{l} \frac{1}{n} \geq 1 + \sum_{n=1}^{k+1} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

der $l = 2 + \sum_{m=1}^{k} 2^k$ og $k > 0$. Siden partialsummene til $\sum \frac{1}{2}$ danner en ubegrenset følge, må også partialsummene til $\sum \frac{1}{n}$ gjøre det, og følgelig er rekken divergent. $\triangle$

Hvis det kilte litt i magen når du leste eksemplet over, kan du ta en titt her: `https://en.wikipedia.org/wiki/Riemann_zeta_function`.

Eksempel 3.16. Vi kan bruke det samme trikset til å vise at rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \cdots$$

er konvergent. Siden

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

og

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}<\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$$

og så videre, må vi ha

$$\sum_{n=1}^{l}\frac{1}{n^2}\leq 1+\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}$$

der $l = 1+\sum_{m=1}^{k} 2^k$ og $k > 0$. Siden partialsummene til $\sum \frac{1}{2^k}$ danner en begrenset følge, må også partialsummene til $\sum \frac{1}{n^2}$ gjøre det, og følgelig er rekken konvergent. Det går faktisk an å regne ut at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

men det må vi vente med til våren. △

Dette kan generaliseres til noe som kalles Cauchys kondenstest, men det skal ikke vi gjøre. I eksemplet over brukte vi følgende teorem.

> Teorem 3.17. Sammenlikningstesten: La $f(n)$ og $g(n)$ være positive følger, med $f(n) \leq g(n)$. Dersom $\sum f$ divergerer, divergerer $\sum g$. Dersom $\sum g$ konvergerer, konvergerer $\sum f$.

Eksempel 3.18. Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

konvergerer dersom $p > 1$ og divergerer dersom $p \leq 1$. Dette kalles en p-rekke. Vi har allerede sjekket at denne er konvergent for $p = 2$ og divergent for $p = 1$, så sammenlikningstesten gir konvergens for $p \geq 2$ og divergens for $p \leq 1$. Man kan bruke Cauchys kondenstest for å sjekke $1 < p < 2$ men dette er litt for komplisert for oss. △

Her er en rekketest som er veldig enkel i bruk.

> Teorem 3.19. Alternerende rekke: dersom $f(n)$ er en monotont synkende og positiv følge som konvergerer mot null, er rekken
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(n)$$
>
> konvergent.

Eksempel 3.20. Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$$

er konvergent. Vi skal se mot slutten av semesteret hvorfor denne summerer til ln 2. △

Alterenerende-rekke-testen er grei oppvarming til følgende konsept.

> Definisjon. En rekke konvergerer absolutt dersom
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$$
>
> konvergerer. En konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt, sies å konvergere betinget.

Eksempel 3.21. Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

er betinget konvergent, siden

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

er divergent. △

> Teorem 3.22. Dersom
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$$
>
> konvergerer, konvergerer også
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

Eksempel 3.23. Vi trenger altså ikke lure på om

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$$

er konvergent. △

Her kommer to tester som kan brukes på alle rekker. De kan brukes til å sjekke absolutt konvergens ved å putte inn $\sum |f(n)|$.

> Teorem 3.24. Forholdstesten: La f være en følge, og la
>
> $$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}.$$
>
> Dersom $|\rho| > 1$ er $\sum f$ divergent. Dersom $|\rho| < 1$ er $\sum f$ konvergent. Dersom $|\rho| = 1$ gir testen ingen informasjon.

Eksempel 3.25. Forholdstesten gir at

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

er konvergent, siden

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{1/(n+1)!}{1/n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$ △

Eksempel 3.26. Forholdstesten gir også at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

er absolutt konvergent for alle x, siden

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}/(n+1)!|}{|x^n/n!|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \qquad \triangle$$

Teorem 3.27. Grensesammenlikningstesten: La f og g være følger, og la

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}.$$

Dersom $\rho > 0$ og $\sum g$ er divergent, er også $\sum f$ divergent.
Dersom $\rho < \infty$ og $\sum g$ er konvergent, er også $\sum f$ konvergent.

Eksempel 3.28. Grensesammenligningstesten gir at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$$

er divergent, siden

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad \triangle$$

Alle tester er også gyldige for komplekse følger og rekker, dersom man tolker $|a_n|$ som den komplekse absoluttverdien til a_n.

Oppgaver

12. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

er divergent.

13. Hva med

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

?

14. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

er konvergent.

15. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

er konvergent.

16. Vis at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$$

er konvergent.

17. Finn summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

18. Finn summen til rekken

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{9^n}.$$

19. Anta at

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

er en konvergent rekke. Er

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

konvergent?

Kapittel 4

Funksjoner på $\mathbb{R}$

I dette kapitlet skal vi ta for oss funksjoner på $\mathbb{R}$. Dette er på noen måter mer komplisert enn funksjoner på $\mathbb{N}$.

En sykt viktig funksjon

Mange vil hevde at eksponensialfunksjonen

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

er den viktigste funksjonen av alle. Forholdstesten viser at rekken er absolutt konvergent for alle x:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

og det går an å vise at

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Tallet e er definert ved

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71182818284590452\ldots,$$

og det går an å vise at

$$\exp(x) = e^x.$$

Dette er relativt enkelt å vise for rasjonale x, man ser fra produktregelen at

$$\exp(2) = \exp(1)\exp(1) = e^2$$

og at

$$\exp(1) = \exp(1/2)\exp(1/2) = \sqrt{e}\sqrt{e}$$

og så videre.

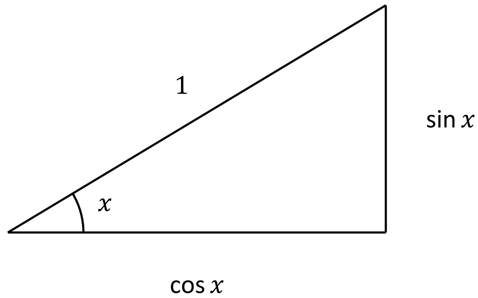
Eksempel 4.1. Det er vel på tide å introdusere sinusfunksjonen

$$\sin x = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og cosinusfunksjonen

$$\cos x = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

På skolen lærte du at disse var katetene i en rettvinklet trekant:



Det går an å vise at alt dette er det samme, men det er litt jobb. △

Kontinuerlige funksjoner

Anta at man har en funksjon f. Grenseverdien

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

forteller oss noe om hva som skjer med f når den avhengige variabelen x går mot verdien x_0. For de fleste funksjoner man støter på i dagliglivet, er

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

men dette er ikke alltid riktig.

Definisjon. En funksjon sies å ha grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L.$$

Teorem 4.2. En grenseverdi, dersom den eksisterer, er entydig.

Bevis. Dette er så og si identisk med beviset for tilsvarende teorem for følger. Prøv selv! □

Eksempel 4.3. For den konstante funksjonen

$$f(x) = 1$$

gjelder at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$$

overalt. Dette er lett å se. Velg ϵ. Vi har at

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0,$$

så her kan δ velges til hva som helst. $\triangle$

Eksempel 4.4. Det første ordens polynomet

$$f(x) = ax + b$$

har grenseverdien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = ax_0 + b.$$

Dette er også lett å se. Velg ϵ. Vi har at

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)|.$$

Dersom vi velger $\delta = \epsilon/|a|$, og krever $0 < |x - x_0| < \delta$, får vi

$$|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| < |a|\frac{\epsilon}{|a|} = \epsilon.$$

Spesialtilfellet $a = 1$ og $b = 0$ forteller at

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0,$$

som vi skal få bruk for lenger ned. $\triangle$

Eksempel 4.5. Vi prøver å finne

$$\lim_{x\to 0} \exp(x).$$

Hva kan L være? Vi ser først av definisjonen at

$$\exp(0) = 1,$$

Dette forteller ikke nødvendigvis at

$$\lim_{x\to x_0} \exp(x) = 1,$$

men vi kan ha det som arbeidshypotese, og undersøke saken nærmere. La $|x| < 1$. Det følger at

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \\
&\le |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = |x|(e - 1).
\end{aligned}$$

Velg ϵ. Dersom $|x| \le \frac{\epsilon}{e-1}$ vil

$$\begin{aligned}
|\exp(x) - 1| &\le |x|(e - 1) \\
&\le \frac{\epsilon}{e-1}(e - 1) = \epsilon,
\end{aligned}$$

som er det vi måtte vise. $\triangle$

Merk at i de tre foregående eksemplene er funksjonsverdier og grenseverdier identiske. Dette er et viktig poeng vi skal komme tilbake til om litt.

Eksempel 4.6. Vi kan på liknende vis som i forrige eksempel, se at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$$

La $|x| < 1$. Det følger at

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1\right| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x^n}{(n+1)!}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{(n+1)!} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n+1)!} \\
&\le |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} = |x|(e - 2).
\end{aligned}$$

Velg ϵ. Dersom $|x| \le \frac{\epsilon}{e-2}$ vil

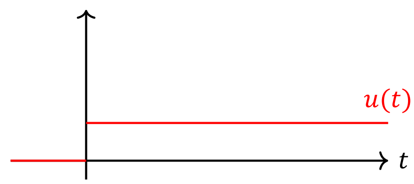
$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(x) - 1}{x} - 1\right| &\le |x|(e - 2) \\
&\le \frac{\epsilon}{e-2}(e - 2) = \epsilon,
\end{aligned}$$

som er det vi måtte vise. Denne grenseverdien får vi bruk for når vi skal derivere eksponensialfunksjonen litt lenger ned. $\triangle$

Eksempel 4.7. Heavisidefunksjonen er gitt ved

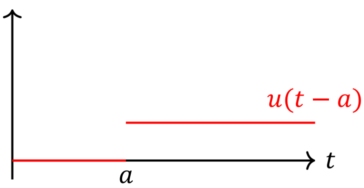
$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \ge 0. \end{cases}$$

Man kan tenke på denne som en funksjon som slår noe på ved $t = 0$:



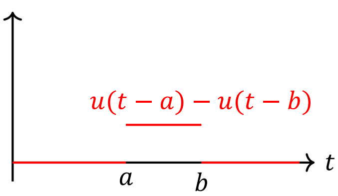
Vi kan slå på ved tiden $t = a$ istedet:

$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } t \ge a, \end{cases}$$



Vi kan også slå på ved $t = a$ og av igjen ved $t = b$:

$$u(t - a) - u(t - b) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < a \\ 1 & \text{for } a \le t < b \\ 0 & \text{for } t \ge b. \end{cases}$$



Grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} u(x)$$

eksisterer ikke. Hva skulle den i så fall vært? Fra venstre ser det ut til at u går mot null, mens fra høyre ser det ut til at u går mot en. △

Eksempel 4.8. Grenseverdien

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

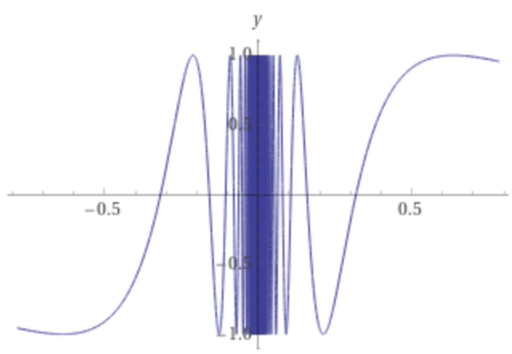
eksisterer ikke. Siden $\sin\frac{1}{x} = 1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

og $\sin\frac{1}{x} = -1$ når

$$x = \frac{1}{2\pi n + \frac{3\pi}{2}}$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, ser vi at dersom du står i $x = a$ og lar $x \to 0$ vil $\sin\frac{1}{x}$ ha uendelig mange oscillasjoner mellom a og 0, uansett hvor liten a er. Så konklusjonen er at dersom du har en kandidat for grenseverdi L, og velger $\epsilon > 0$ og $\delta > 0$ som du tror gjør jobben, vil $|\sin\frac{1}{x} - L| > 1 - |L|$ for en eller annen $|x| < \delta$, og L er altså ikke en grenseverdi. Dette eksemplet er litt komplisert, men vi skal bruke det til å illustrere et viktig poeng litt senere. Ta en titt på figuren under. △



Teorem 4.9. Anta vi har to funksjoner f og g, med

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \quad \text{og} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$$

og la c være et tall. Da gjelder at

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2$$
$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = cL_1$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1L_2$$
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = L_1/L_2 \quad (L_2 \neq 0)$$

Bevis. Velg ϵ. Vi må vise at det går an å velge δ slik at $0 \le |x - x_0| \le \delta$ impliserer

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \epsilon$$

Merk først at

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= \\ |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| &\le \\ |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|&\end{aligned}$$

Siden f og g har respektive grenseverdier L_1 og L_2 i x_0, kan vi velge δ slik at $0 \le |x - x_0| \le \delta$ impliserer

$$|f(x) - L_1| < \epsilon/2$$

og

$$|g(x) - L_2| < \epsilon/2.$$

Men i så fall impliserer $0 \le |x - x_0| \le \delta$ at

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

som var det vi skulle vise. De andre reglene bevises på liknende måte, men det er litt mer regning. □

Eksempel 4.10. Nå kan vi vise at dersom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

er

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0).$$

For det første vet vi at

$$\lim_{x\to x_0} 1 = 1$$

og at

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Teoremet om regneregler for grenseverdier sier at

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = L_1L_2,$$

og dersom vi velger $f(x) = g(x) = x$, ser vi at

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = x_0^2.$$

Det samme teoremet sier at

$$\lim_{x\to x_0} cf(x) = cL_1,$$

så derfor er

$$\lim_{x\to x_0} cx^2 = cx_0^2.$$

Til slutt kan vi bruke

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = L_1 + L_2,$$

og slutte at for eksempel

$$\lim_{x\to x_0} 2x^2 + x = 2x_0^2 + x_0.$$

Hvis vi fortsetter i samme stilen, ser vi at

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 \\ &= p(x_0).\end{aligned}$$

△

Eksempel 4.11. Vi kan nå vise at

$$\lim_{x \to x_0} \exp x = \exp x_0.$$

Siden

$$\lim_{x \to x_0} x = x_0,$$

må

$$\lim_{x \to x_0} x - x_0 = 0.$$

Vi beregner så

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \exp x &= \lim_{x \to x_0} \exp(x_0 + x - x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} \exp x_0 \exp(x - x_0) \\ &= \exp x_0 \lim_{x \to x_0} \exp(x - x_0) \\ &= \exp x_0 \exp(0) = \exp x_0.\end{aligned}$$

△

Det neste teoremet kalles gjerne skviseteoremet, for det handler om en funksjon som blir skvist mellom to andre funksjoner.

Teorem 4.12. Anta at $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ på et intervall som inneholder x_0, og at

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

Da er

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

Bevis. Denne tar vi i IF. □

Eksempel 4.13. Man kan bevise at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

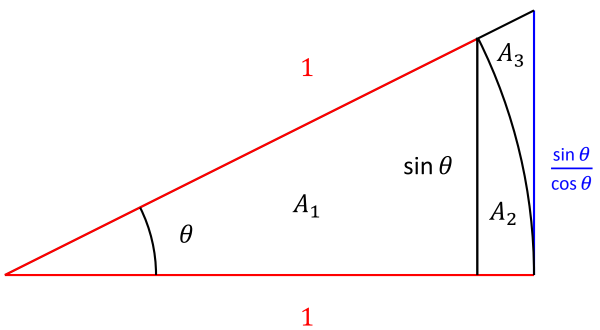
geometrisk ved å bruke skviseteoremet på ulikheten

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}.$$

Denne kan utledes ved å betrakte figuren under og se at

$$A_1 \leq A_1 + A_2 \leq A_1 + A_2 + A_3.$$

Husk at arealet av et kakestykke med radius en og vinkelutslag θ er $\theta/2$. △



Eksempel 4.14. Grenseverdien

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

eksisterer. Siden $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$ når $x \neq 0$, er

$$-|x| \leq x \sin \frac{1}{x} \leq |x|,$$

og siden

$$\lim_{x \to 0} |x| = \lim_{x \to 0} -|x| = 0,$$

må

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

△

Til slutt kan nevnes at i noen situasjoner er vi nødt til å operere med ensidige grenser.

Definisjon. En funksjon sies å ha den venstresidige grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L$$

eller

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L.$$

Høyresidige grenser defineres tilsvarende.

En funksjon er kontinuerlig i et punkt dersom du kan tegne grafen gjennom punktet uten å løfte blyanten fra rutepapiret. For å gjøre dette presist, bruker vi grenseverdibegrepet.

Definisjon. En funksjon sies å være kontinuerlig i x_0 dersom:

- $f(x_0)$ er definert
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ eksisterer
- $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

Som regel er det slik at man ikke spør om f er kontinuerlig i et punkt der f ikke er definert, for disse punktene ekskluderes per definisjon fra definisjonsmengden. Vi sier at en funksjon er kontinuerlig på et intervall dersom funksjonen er kontinuerlig for alle punkter i intervallet. Dersom intervallet er lukket, bruker man ensidige grenser i endepunktene.

Eksempel 4.15. Polynomer er kontinuerlige overalt. Vi har vist at for et polynom p, er

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0)$$

for alle x_0. △

Eksempel 4.16. En rasjonal funksjon er en funksjon på formen

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomer. Det samme resonnementet som for polynomer kan kjøres på disse funksjonene. Man bruker at

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2},$$

og slutter at siden p og q er polynomer, er

$$\lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)},$$

så lenge $q(x_0) \neq 0$. Derfor er rasjonale funksjoner kontinuerlige overalt der $q(x) \neq 0$. △

Eksempel 4.17. Heavisidefunksjonen er ikke kontinuerlig i $x = 0$. △

Eksempel 4.18. Eksponensialfunksjonen er kontinuerlig overalt. Vi har jo vist at

$$\lim_{x \to x_0} \exp x = \exp x_0$$

for alle x_0. △

Eksempel 4.19. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ L & x = 0 \end{cases}$$

er ikke kontinuerlig for noen L. △

Eksempel 4.20. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig overalt. △

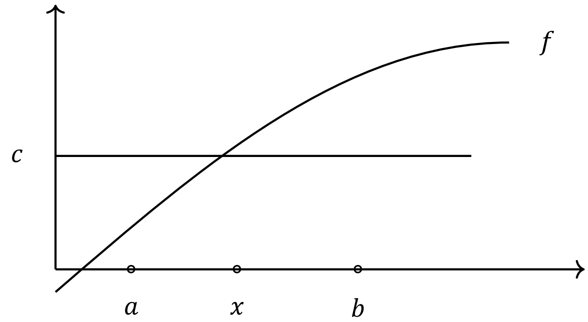
Eksempel 4.21. Funksjonen gitt ved $f(x) = 1/x$ kan virke noe paradoksal, siden den er kontinuerlig overalt der den er definert, men allikevel ikke kan tegnes uten å løfte blyanten fra arket i $x = 0$. Forklaringen er at f er ikke definert i $x = 0$, og dette deler definisjonsmengden i to adskilte deler. En kontinuerlig funksjon kan tegnes uten å løfte pennen fra papiret så lenge du ser på et sammenhengende intervall, men når definisjonsmengden er delt i to, bryter dette sammen. (Man kan spørre seg om det er naturlig i det hele tatt å stille spørsmålet hvorvidt en funksjon er kontinuerlig på en ikke sammenhengende definisjonsmengde.) Dette er lett å bli forvirret av i starten, og det finnes en strengere type kontinuitet som kalles uniform kontinuitet. En funksjon f er uniformt kontinuerlig dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

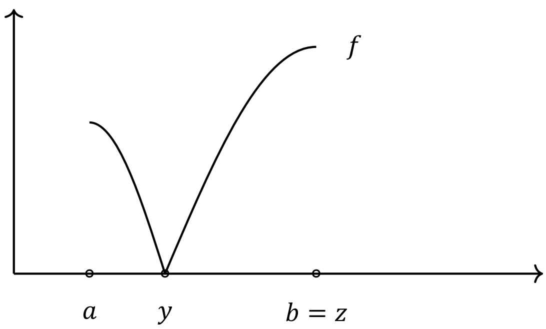
for alle x og y. Funksjonen $f(x) = 1/x$ er ikke uniformt kontinuerlig. △

De to neste teoremene kalles henholdsvis skjæringssetningen og ekstremalverdisetningen. Bevisene er litt for vanskelige for dette kurset, men figurene kan hinte om hvorfor teoremene er sanne. Merk også at teoremene ikke er sanne dersom definisjonsmengden er $\mathbb{Q}$ istedet for $\mathbb{R}$.

Teorem 4.22. Anta at f er en kontinuerlig funksjon på $[a, b]$, og at $f(a) < f(b)$. Dersom $f(a) < c < f(b)$, finnes en $x \in [a, b]$ slik at $f(x) = c$.

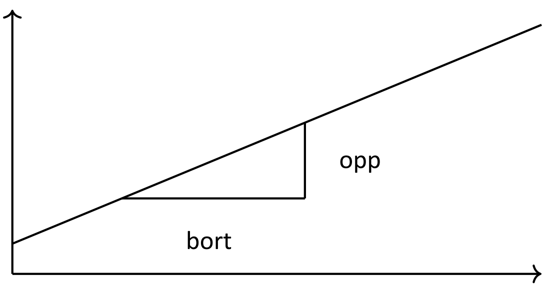


Teorem 4.23. Anta at f er en kontinuerlig funksjon på $[a, b]$. Det finnes punkter y og z slik at $f(y) \leq f(x) \leq f(z)$ for alle $x \in [a, b]$.

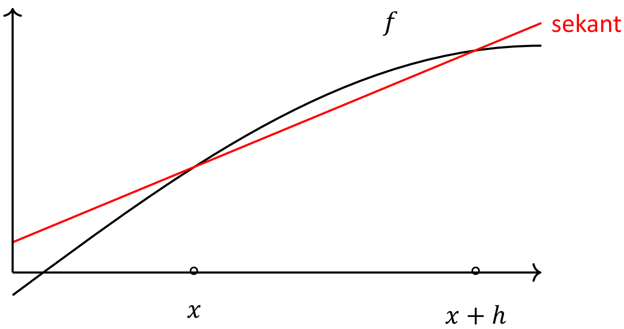


Deriverbare funksjoner

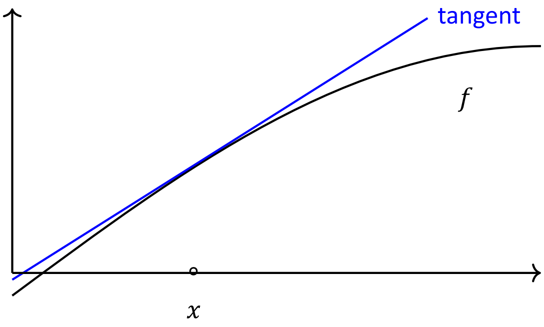
Det er et interessant faktum at Newton fant ut av differensialregning flere hundre år før noen skjønte hva de reelle tallene egentlig var. Stigningstallet til en rett linje er opp delt på bort.



La f være en funksjon. En sekant er en rett linje som skjærer grafen til f lokalt i to punkter:



En tangent er en rett linje som tangerer grafen til f i et punkt:



Man kan tenke på dette som en sekant der de to skjæringspunktene er sammenfallende. Stigningstallet til tangenten i x_0 er det vi mener når vi snakker om stigningstallet til f i x_0. Nå skal vi definere nøyaktig hva vi mener med dette.

> Definisjon. Vi definerer den deriverte til f i punktet x som
> $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
> dersom grenseverdien eksisterer. Vi sier i så fall at f er deriverbar i x.

Vi skriver også
$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x).$$
Noen ganger er denne notasjonen mer praktisk. Siden grenseverdier er entydige, ser vi at den deriverte er entydig bestemt dersom den eksisterer. Likningen for tangenten til f i punktet x_0 er gitt ved
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Eksempel 4.24. La $f(x) = x$. Vi beregner
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$
△

Eksempel 4.25. La $f(x) = \exp x$. Produktregelen for eksponensialfunksjonen gir
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} \\ &= \exp x \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x. \end{aligned}$$
△

Eksempel 4.26. Funksjonen
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
er kontinuerlig, men ikke deriverbar, i $x = 0$. Grenseverdien
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin \frac{1}{h} \end{aligned}$$
eksisterer ikke. △

> Teorem 4.27. Dersom en funksjon er deriverbar i et punkt, er den også kontinuerlig i punktet.

Bevis. Dersom
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
skal eksistere, må både $f(x)$ og
$$\lim_{h\to 0} f(x+h)$$
eksistere, og de må være like. Men dette er det samme som at f kontinuerlig i x. □

Eksempel 4.28. Hverken heavisidefunksjonen eller $\sin \frac{1}{x}$ er deriverbare i $x = 0$. Dette vet vi siden de ikke er kontinuerlige i $x = 0$. △

Eksempel 4.29. Funksjonen
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
er deriverbar i $x = 0$, siden
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0. \end{aligned}$$
Men her er en artig tvist: f' er ikke en kontinuerlig funksjon, for
$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$
og $\lim_{x\to 0} f'(x)$ eksisterer ikke! △

Eksemplet over viser at deriverbarhet ikke impliserer at den deriverte er en kontinuerlig funksjon. Den motsatte implikasjonen er derimot sann; dersom f' er kontinuerlig i et punkt, må jo f' være definert i dette punktet, så det er klart at f er deriverbar om f' er kontinuerlig. Denne lille skjebnens ironi inspirerer oss til følgende definisjon.

> Definisjon. Dersom f' er en kontinuerlig funksjon, sier vi at f er kontinuerlig deriverbar. Dersom den n-te deriverte f^n er kontinuerlig, sier vi at f er n ganger kontinuerlig deriverbar. Dersom f^n er kontinuerlig for alle $n \in \mathbb{N}$, sier vi at f er glatt.

Eksempel 4.30. Funksjonen
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
er kontinuerlig deriverbar i $x = 0$, siden
$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} h^2 \sin \frac{1}{h} = 0. \end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 \sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$$

som er kontinuerlig i $x = 0$. △

Her er noen regler for derivasjon.

Teorem 4.31. La f og g være deriverbare funksjoner. Følgende regler gjelder. (Den tredje gjelder kun når $g(x) \neq 0$.)

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Bevis. Vi vet at

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og at

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Addisjonsregelen er rett fram:

$$\begin{aligned}(f(x) + g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &= f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

For produktregelen må vi sjonglere litt mer:

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h}\\ &+ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\ &+ \lim_{h\to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Brøkregelen dropper vi. □

Eksempel 4.32. La $f(x) = x^2$. Vi beregner

$$f'(x) = (x \cdot x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

△

Eksempel 4.33. La $f(x) = x^n$, der $n \in \mathbb{N}$. Vi viser at

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ved induksjon. De to foregående eksemplene viser at regelen gjelder for $n = 1$ og $n = 2$. Induksjonssteget er å vise at likningen

$$\frac{d}{dx}x^n n = nx^{n-1}$$

impliserer

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n.$$

Vi bruker multiplikasjonsregelen på den første, og får

$$\left(x^{n+1}\right)' = (x \cdot x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot (nx^{n-1}) = (n+1)x^n.$$

Bruker vi derivasjonsregelen for rasjonale funksjoner, ser vi at regelen også gjelder for $n \in \mathbb{Z}$. Det går også an å vise at regelen gjelder dersom $n \in \mathbb{R}$, men dette er mye vanskeligere. △

Teorem 4.34. Dersom f er deriverbar i punktet $g(x)$, og g er deriverbar i punktet x, er

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x).$$

Bevis. Denne er litt teknisk, så vi nøyer oss med en skisse av hvordan beviset går. Da kan man ihvertfall skjønne hvorfor formelen ser ut som den gjør. Vi må beregne

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Men dersom $h \neq 0$, er

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h},$$

slik at

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(g(x))) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x).\end{aligned}$$

□

Eksempel 4.35. La $f(x) = \cos x$. Vi bruker kjerneregelen, og får

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{i\exp(ix) - i\exp(-ix)}{2}\\ &= -\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} = -\sin x.\end{aligned}$$

△

På skolen lærer man gjerne at maksimum og minimum er det samme som at tangenten er vannrett. Dette er en forenkling av virkeligheten, Det finnes også andre typer maksimums- og minimumspunkter.

Eksempel 4.36. La $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x$. Denne funksjonen har maksimum i $x = 1$. Dette er helt åpenbart det punktet der f tar sin største verdi. △

Eksempel 4.37. Funksjonen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = |x|$ har et lokalt minimum i $x = 0$, siden

$$0 \leq |x|$$

for alle x. △

Definisjon. Dersom det finnes en δ slik at

$$|x-p|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(p)\geq f(x),$$

sier vi at p er et lokalt maksimum for f. Dersom

$$|x-p|<\delta \quad \Rightarrow \quad f(p)\leq f(x),$$

er p et lokalt minimum.

Eksempel 4.38. Funksjonen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gitt ved $f(x)=1-(x-1)^2$ har et lokalt maksimum i $x=1$. Dette er mulig å se ved å niglane litt på funksjonsuttrykket. Siden

$$(x-1)^2\geq 0$$

oppnår funksjonen sin maksimale verdi når dette leddet er null, altså i $x=1$. △

Definisjon. Et punkt p der $f'(p)=0$, kalles gjerne kritisk punkt. Punkter der f' ikke eksisterer, kalles singulære punkter.

Teorem 4.39. Dersom f er en funksjon på (a,b), har et lokalt maksimum i p, og $f'(p)$ er definert, er $f'(p)=0$. Det samme gjelder om p er et minimum.

Bevis. La p være et lokalt maksimum. Beviset for minimum er helt likt. Dersom $h>0$ er liten, er

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\leq 0,$$

og dersom vi lar h gå mot null, ser vi at

$$f'(p)=\lim_{x\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\leq 0.$$

Men vi kan gjøre det samme resonnementet med en liten $h<0$. Da blir

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\geq 0,$$

og

$$f'(p)=\lim_{x\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}\leq 0.$$

Med andre ord må både $f'(p)\leq 0$ og $f'(p)\geq 0$, så eneste mulighet er $f'(p)=0$. □

Eksempel 4.40. Et andregradspolynom

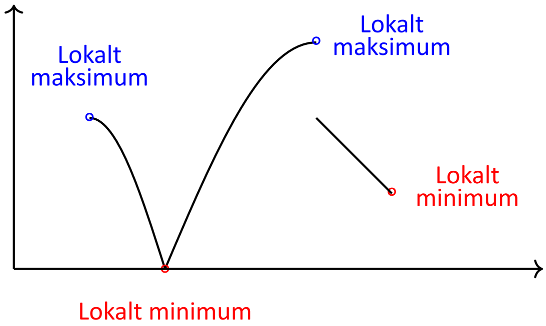
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

har ekstremaltpunkt i $x=-\frac{b}{2a}$, siden

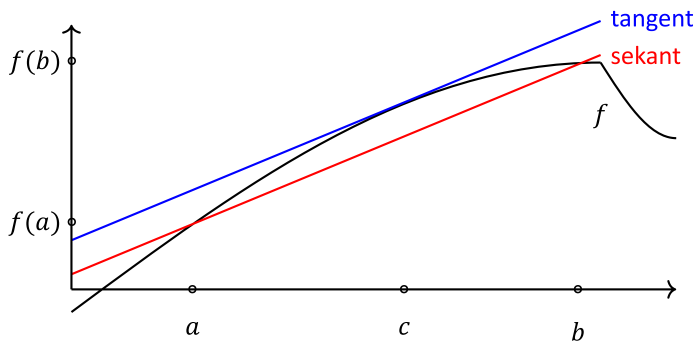
$$f'\left(-\frac{b}{2a}\right)=2a\cdot\left(-\frac{b}{2a}\right)+b=-b+b=0. \quad △$$

Teorem 4.41. La I være et intervall, og anta at $f:I\to\mathbb{R}$ har et ekstremalpunkt i $x_0\in I$. Da er x_0 enten et endepunkt, eller et kritisk punkt, eller et singulært punkt.

Under er en figur av en funksjon med verdimengde $[a,b]$.



Sekantsetningen kan brukes til å bevise noen andre interessante ting, og er motivert fra følgende figur. Dersom f er deriverbar og du slår en sekant, må det mellom punktene der du slo sekanten finnes en tangent som er parallell med sekanten din.



Teorem 4.42. Dersom f er kontinuerlig på $[a,b]$ og deriverbar på (a,b), finnes $c\in(a,b)$ slik at

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bevis. Vi beviser først spesialtilfellet der $f(a)=f(b)$. I dette tilfellet kalles gjerne sekantsetningen Rolles teorem, og teoremet sier nå at $f'(c)=0$ for en eller annen $c\in(a,b)$. Dette er lett å bevise. Siden f er kontinuerlig på $[a,b]$, må f ha et maksimum og et minimum på $[a,b]$. Hvis begge disse sitter i endepunktene, må f være en konstant funksjon, og da må minst ett av disse finnes på (a,b). La oss kalle dette punktet c. Siden f er deriverbar på (a,b) må $f'(c)=0$.

Dersom $f(a)\neq f(b)$, kan vi gjøre som følger. La g være funksjonen gitt ved

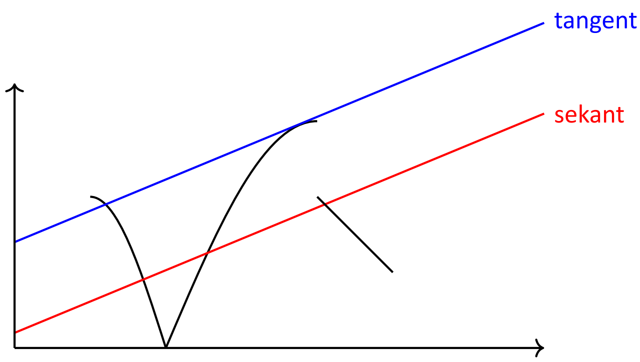
$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Siden $g(a)=g(b)=f(a)$, må Rolles teorem gjelde, og det må finnes et punkt $c\in(a,b)$ slik at $g'(c)=0$. Men dette betyr at

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

som er det sekantsetningen sier. □

Merk at f må være deriverbar overalt på (a,b), ellers trenger ikke utsagnet i teoremet være sant.

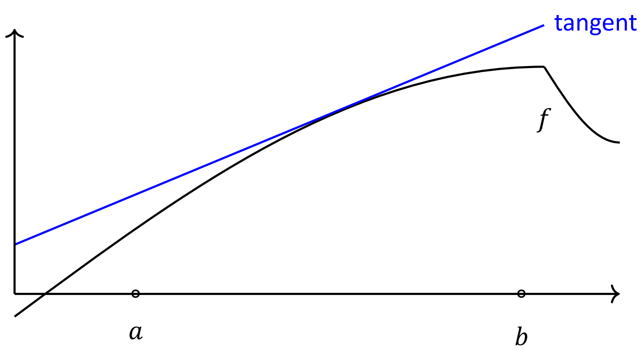


Sekantsetningen har en generalisering som kalles taylors teorem.

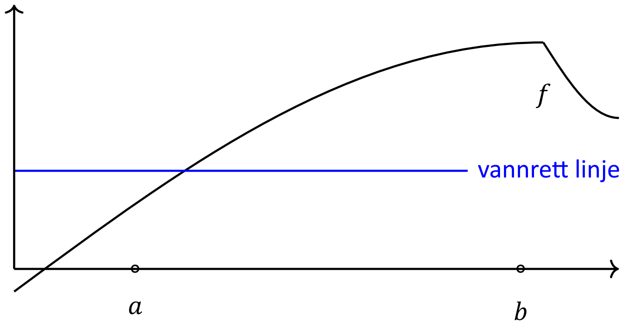
> Teorem 4.43. La f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x. Det finnes en s mellom a og x slik at
>
> $$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Vi avslutter med to teoremer.

> Teorem 4.44. Anta at f er deriverbar på (a,b). Dersom $f' > 0$ på (a,b) er f stigende på (a,b). og dersom $f' < 0$ på (a,b) er f synkende på (a,b).



> Teorem 4.45. Anta at f er deriverbar på (a,b) og enten $f' > 0$ eller $f' < 0$ på (a,b). Da eksisterer f^{-1}, og
>
> $$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$



Dersom vi deriverer likningen

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x,$$

med kjerneregelen, får vi

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \frac{d}{dx}f^{-1}(x) = 1,$$

som gir at

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Analytiske funksjoner

Vi er vant med å skrive om funksjoner. For eksempel kan funksjonsuttrykket

$$f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

like gjerne skrives

$$f(x) = \cos 2x.$$

I dette kapitlet skal vi ta et steg videre, og skrive funksjoner som uendelige summer av tilsynelatende ikkerelaterte funksjoner.

Du kjenner allerede fire taylorrekker.

Eksempel 4.46.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \triangle$$

Eksempel 4.47.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \triangle$$

Eksempel 4.48.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad \triangle$$

Eksempel 4.49.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1) \qquad \triangle$$

Eksempel 4.50. Funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)(x-1)}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 0 \end{cases}$$

er glatt, men ikke analytisk. Siden

$$\lim_{s\to 1}\frac{d}{dx^n}f(s) = \lim_{s\to -1}\frac{d}{dx^n}f(s) = 0$$

for alle n er f glatt, men det er klart at taylorrekken om et punkt $x = a$ ikke kan representere f på hele $\mathbb{R}$. △

Det er også mulig å skrive funksjoner som uendelige rekker av sinus- og cosinusfunksjoner, men dette skal vi vente med til senere.

Eksempel 4.51.

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$ △

Numeriske likningsløsere

Det tilsynelatende mylderet av likninger man løser på skolen kan forlede en til å tro at man kan løse alle likninger analytisk, men i virkeligheten lærer man først og fremst standardteknikker for å løse noen veldig spesifikke likningstyper.

Eksempel 4.52. Likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kan løses ved å dele ut a, og skrive

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = 0$$

eller

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

Vi kvadrerer, og får

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

som kalles abc-formelen. △

Løsningen til en likning kalles gjerne en rot.

Eksempel 4.53. Likningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

har en røtter $x = -1$ og $x = \pm\sqrt{3}$, men disse er ikke enkle å finne. Oppskriften for å løse en generell tredjegradslikning er lang og teknisk, og selv matematikkstudenter lærer det ikke. Løsningsteknikken til en generell fjerdegradslikning er enda mer komplisert, og for en generell femtegradslikning kan man ikke en gang utlede en løsningsformel. △

Eksempel 4.54. Likningen

$$\cos(2x + 3) = \frac{1}{2}$$

løses ved å invertere cosinusfunksjonen

$$2x + 3 = \arccos\frac{1}{2},$$

huske at $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$2x + 3 = \frac{\pi}{3},$$

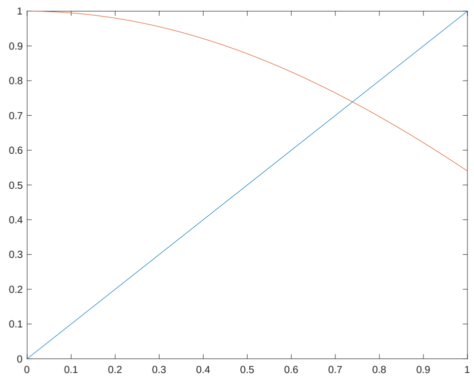
og løse for x

$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}.$$ △

Eksempel 4.55. Likningen

$$x = \cos x$$

har en rot på intervallet $[0, 1]$, se figur. Men denne likningen kan ikke løses med et endelig antall algebraiske operasjoner. △



Noen likninger kan altså løses, mens andre ikke kan det. Løsningen til likningen over eksisterer (den kalles Dottietallet og er oppkalt etter en professor i fransk: `https://www.maa.org/sites/default/files/Kaplan2007-131105.pdf`), men den er ikke så lett å finne uten en kalkulator. Andre likninger har løsningsteknikker som er for kompliserte til at det er praktisk å lære seg dem. Finnes det ingen løsningsteknikker som takler alle likninger? Svaret er nei, men det finnes teknikker for å beregne tilnærmede løsninger til likninger vi av en eller annen grunn ikke kan løse analytisk, og disse teknikkene kan ofte brukes på brede klasser av likninger. Disse teknikkene kalles numeriske likningsløsere.

En numerisk likningsløser produserer en følge av tilnærminger til løsningen. Dersom likningsløseren er tilpasset likningen vi prøver å løse, vil tilnærmingene bli bedre utover i følgen. Det neste eksemplet illustrerer tankegangen.

Eksempel 4.56. Siden

$$\cos\frac{1}{2} \approx 0.8776 \geq \frac{1}{2}$$

ser vi at roten ligger i intervallet $[\frac{1}{2}, 1]$. La oss sette $x_0 = \frac{3}{4}$, altså midt i dette invtervallet. Dette kan vi se på som en tilnærming til den analytiske løsningen. Siden

$$\cos\frac{3}{4} \approx 0.7317 \leq \frac{3}{4}$$

ser vi videre at roten må ligge i intervallet $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, som er halvparten så bredt som det forrige, og vi setter $x_1 = \frac{5}{8}$, altså midt i det nye intervallet. Siden

$$\cos\frac{5}{8} \approx 0.8110 \geq \frac{5}{8},$$

må roten ligge i $[\frac{5}{8}, \frac{3}{4}]$, og vi setter $x_2 = \frac{11}{16}$. Slik kan vi fortsette så lenge vi ønsker. Denne metoden kalles gjerne halveringsmetoden. △

Professor Dottie gjenoppdaget med sine eksperimenter noe som kalles fikspunktiterasjonen. Hun oppdaget kort og godt at iterasjonen

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

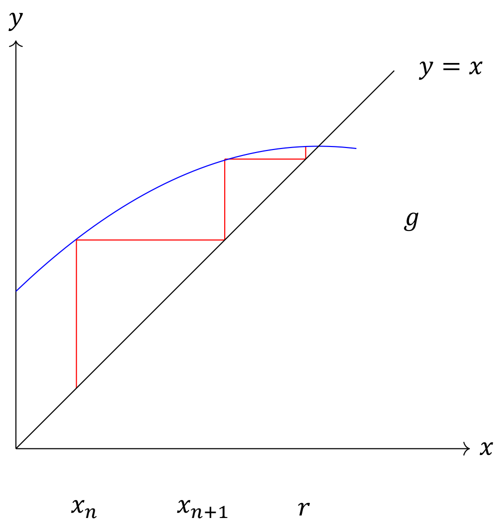
sakte men sikkert konvergerer mot den korrekte løsningen $r \approx 0.739085$. Dette ser sikkert rart ut, men i neste uke skal vi se på hvorfor dette noen ganger virker, og når det eventuelt virker. La oss anta at vi har en likning på formen

$$x = g(x).$$

En løsning r av en slik likning, kalles et fikspunkt. Fikspunkmetoden er definert ved iterasjonen

$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n)}$$

Det kan virke snodig at denne iterasjonen skal hjelpe oss til å finne r. Men det gjør den ofte. Figuren under illustrerer hvordan iterasjonen finner frem.



Eksempel 4.57. Likningen

$$x = \cos x$$

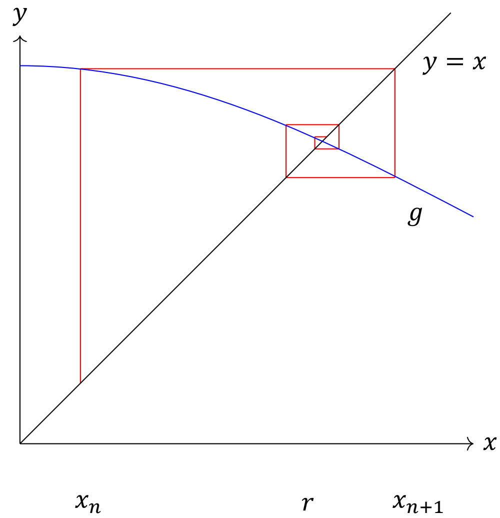
har som nevnt en foreløpig ukjent rot på intervallet $[0, 1]$. Iterasjonen

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

produserer følgende tabell, dersom vi setter $x_0 = \frac{3}{4}$:

x_0	0.7500000000000000
x_1	0.731688868873821
x_2	0.744047084788764
x_3	0.735733618187236
x_4	0.741338598887922
x_{78}	0.739085133215161

Det går ikke så fort i svingene. Figurene under illustrerer hva som skjer. △



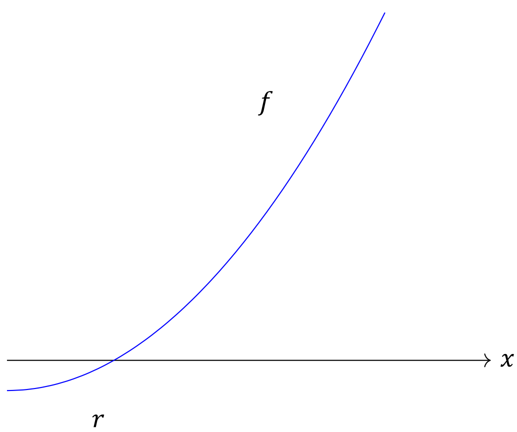
I neste bolk skal vi sette opp presise konvergenskriterier for fikspunktiterasjonen.

En av de metodene som er enklest å forstå, er Newtons metode. På samme måte som halveringsmetoden, produserer den en følge av tilnærminger til løsningen av likningen.

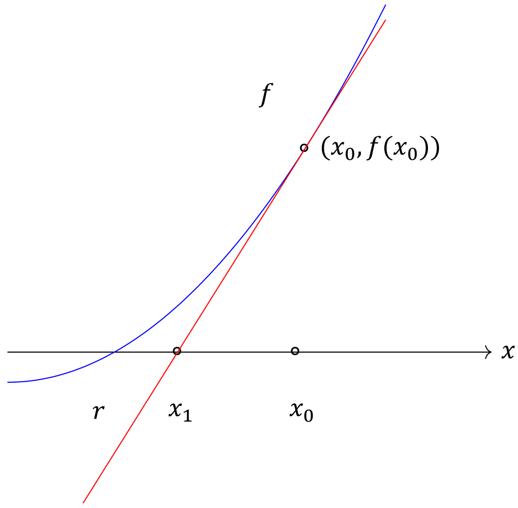
Newtons metode baserer seg på at likningen er skrevet på formen

$$f(x) = 0.$$

Den leter altså etter nullpunkter til funksjoner. La oss si at nullpunktet vi leter etter kalles r.



La oss anta at vi har en tilnærming x_0 til r. Vi slår tangenten til f i x_0.



Punktet der tangenten skjærer x-aksen, kaller vi x_1. Dette punktet kan vi finne ved å sette opp likningen for tangenten til f i x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

og så kreve at $y = 0$ i denne likningen:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

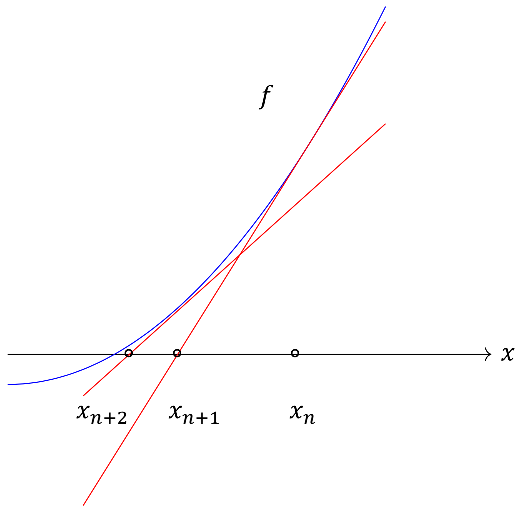
Løser vi denne likningen for x_1, får vi at

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Newtons metode er definert som den rekursive følgen

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.}$$

I mange situasjoner konvergerer denne følgen ganske fort mot r.



Eksempel 4.58. Likningen

$$x = \cos x$$

har som nevnt en foreløpig ukjent rot på intervallet $[0, 1]$. For å bruke Newtons metode, må vi skrive likningen

$$f(x) = x - \cos x = 0$$

og sette opp Newtons iterasjon

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

Setter vi $x_0 = \frac{3}{4}$, produserer metoden følgende tabell:

x_0	0.7500000000000000
x_1	0.739111138752579
x_2	0.739085133364485
x_3	0.739085133215161
x_4	0.739085133215161

Fra tredje til fjerde iterasjon er det ingen endring. Det betyr at vi mest sannsynlig har roten med seksten desimalers nøyaktighet. Senere i kurset skal vi sette opp presise kriterier for konvergens. △

Teorem 4.59. La g være en kontinuerlig deriverbar funksjon. Dersom både $a < g(x) < b$ og $|g'(x)| \leq L < 1$ på på $[a, b]$, finnes et entydig punkt r slik at

$$r = g(r).$$

Fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

konvergerer mot r dersom $x_0 \in [a, b]$.

Bevis. Siden $a < g(x) < b$ vet vi at $x_1 \in (a, b)$ dersom $x_0 \in [a, b]$. Videre vet vi at dersom $x_n \in (a, b)$, er $x_{n+1} \in (a, b)$, så det er klart at $x_n \in (a, b)$ for alle $n \geq 1$.

Så la oss anta at $x_n \in (a, b)$. Vi bruker taylors teorem på g i r, og skriver

$$g(x_n) = g(r) + g'(s)(x_n - r)$$

for en s mellom x_n og r. Hvis vi bruker at $r = g(r)$ og $x_{n+1} = g(x_n)$, kan vi skrive

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(s)(x_n - r).$$

Vi tar absoluttverdi på begge sider, og bruker at $|g'(s)| \leq L < 1$, siden $s \in (a, b)$:

$$|x_{n+1} - r| = |g'(s)(x_n - r)| \leq L|x_n - r| \leq L^{n+1}|x_0 - r|$$

Lar vi så $n \to \infty$, får vi

$$\lim_{x\to\infty} |x_{n+1} - r| \leq |x_0 - r| \lim_{x\to\infty} L^{n+1} = 0,$$

siden $L < 1$.

For å vise at fikspunktet er entydig, kan vi anta at det finnes to fikspunkt, r_1 og r_2. Men da må

$$\begin{aligned}
|r_2 - r_1| &= |x_{n+1} - r_1 - (x_{n+1} - r_2)| \\
&\leq |x_{n+1} - r_1| + |x_{n+1} - r_2| \\
&\leq L|x_n - r_1| + L|x_n - r_2| \\
&\leq L^{n+1}|x_0 - r_1| + L^{n+1}|x_0 - r_2|.
\end{aligned}$$

Denne likningen gjelder for alle n. Dersom vi lar $n \to \infty$, går det siste uttrykket mot null, og vi ser at dette kun er mulig dersom $r_1 = r_2$. □

Sekantsetningen gir at det finnes et punkt s slik at

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(s)(x_n - r).$$

Dette er en likning som sier noe om størrelsen på $x_{n+1} - r$ som en funksjon av $x_n - r$, altså hvor mye feilen minker fra iterasjon til iterasjon, dersom fikspunktiterasjonen konvergerer. Feilen minker dersom $|g| \le L < 1$.

Eksempel 4.60. Likningen

$$x = \frac{1}{2\cos x}$$

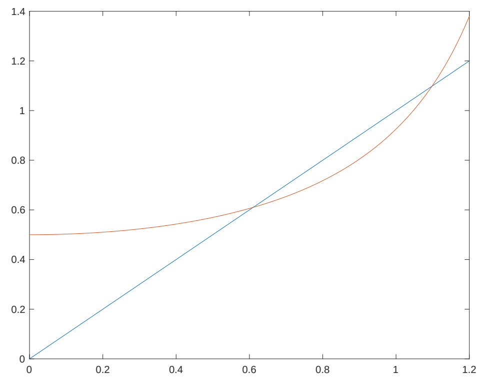
har en rot på intervallet $[1, 1.4]$. La oss prøve å finne den. Iterasjonen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2\cos x_n}$$

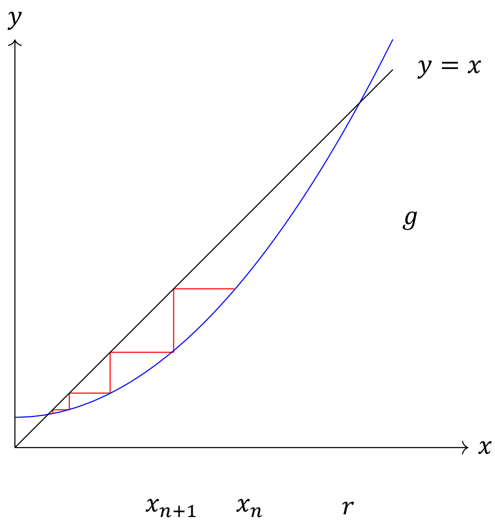
produserer følgende tabell, dersom vi setter $x_0 = 1$:

x_0	1.0000000000000000
x_1	0.925407858840463
x_2	0.831243009591302
x_3	0.741886011422627
x_4	0.678246107990755
x_5	0.642116945705959
x_6	0.624352444102666
x_7	0.616263059398898

Det gikk ikke i det hele tatt. △



I det siste eksemplet fant ikke fikspunktiterasjonen roten vi ville ha, men en annen. Figuren under illustrerer hvorfor. Fikspunkttitrerasjonen finner aldri r dersom $|g(r)| >$



1.

Eksempel 4.61. Vi løser polynomlikningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

Dette polynomet kan spaltes i

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = (x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}),$$

og vi skal se hvordan fikspunkmetoden leter etter de forskjellige løsningene. Likningen kan skrives om til $x = g(x)$ på flere måter, men vi skal begynne med å skrive

$$x = \frac{1}{3}\left(x^3 + x^2 - 3\right),$$

slik at

$$g(x) = \frac{1}{3}\left(x^3 + x^2 - 3\right),$$

og

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}\left(x_n^3 + x_n^2 - 3\right).$$

Vi prøver å finne løsningen $r = \sqrt{3} \approx 1.732050807568877$, og starter derfor en kjøring i $x_0 = 1.5$. Vi får:

x_0	1.500000000000000
x_5	-0.995705356719772
x_{10}	-0.999982551541273
x_{15}	-0.999999928199386
x_{20}	-0.999999999704524
x_{25}	-0.999999999998784
x_{30}	-0.999999999999995
x_{35}	-1.000000000000000

Også nå ønsker metoden heller å finne $r = -1$. △

Fikspunktiterasjonen i forrige eksempel viste en sterk preferanse på hvilken rot den hadde lyst til å finne. Men man kan skrive om likningen til $x = g(x)$ på mange måter.

Eksempel 4.62. Vi skriver nå om likningen

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

til

$$x = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

Starter vi i $x_0 = -1.5$, får vi

x_0	-1.500000000000000
x_5	-1.732004423011461
x_{10}	-1.732050803458349
x_{15}	-1.732050807568513
x_{20}	-1.732050807568878
x_{25}	-1.732050807568877

Denne fikspunktiterasjonen klarte fint å finne roten $r = -\sqrt{3}$. △

Som vi ser av de to foregående eksemplene, kan fikspunktiterasjonen konvergere mot forskjellige røtter avhengig av hvordan vi skriver om likningen. Den kan også ikke konvergere i det hele tatt.

Eksempel 4.63. Vi prøver igjen

$$x = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

Starter vi i $x_0 = 1.5$, i håp om å finne $r = \sqrt{3}$, får vi

x_0	-1.500000000000000
x_1	2.333333333333333
x_2	0.836734693877551
x_3	6.870315288518744
x_4	-0.499781154362809
x_5	5.007884193672099
x_6	-0.281322161800267
x_7	26.242541136990940
x_8	-0.881325585764740
x_9	-0.541641177723142
x_{10}	3.687092259260734

Denne fikspunktiterasjonen klarte ikke å finne noe som helst når vi startet i $x_0 = 1.5$. △

Eksempel 4.64. I eksemplene over er

$$g(x) = \frac{3 + 3x - x^2}{x^2}.$$

og

$$g(x) = \frac{x^3 + x^2 - 3}{3}.$$

Hvis du deriverer disse og evaluerer i røttene til polynomet $x^3 + x^2 - 3x - 3$, vil du se et tydelig mønster. fikspunktiterasjonen greier ikke finne r dersom $|g'(r)| > 1$. △

Vi kan også se på Newtons metode. Vi bruker taylors teorem (husk at $f(r) = 0$)

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2$$

for s mellom x_n og r. Newtons metode er

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

Trekker vi disse likningene fra hverandre, får vi

$$0 = f'(x_n)(r - x_{n+1}) + \frac{f''(s)}{2}(r - x_n)^2.$$

Her står det at

$$r - x_{n+1} = -\frac{f''(s)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

som sier at Newtons metode i mange situasjoner har kvadratisk konvergens. Det går an å sette opp presise kriterier for når dette skjer, men det skal vi ikke gjøre.

Eksempel 4.65. Vi søker løsningene til

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$$

Som Ingrid Espelid Hovig har vi jukset litt, og valgt et polynom som faktoriseres pent:

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

Newtons metode blir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 10x_n^3 + 35x_n^2 - 50x_n + 24}{4x_n^3 - 30x_n^2 + 70x_n - 50}$$

La oss lete etter $r = 1$. Vi starter i $x_0 = 0.5$, og får:

x_0	0.500000000000000
x_1	0.798295454545455
x_2	0.950817599863883
x_3	0.996063283034122
x_4	0.999971872651984
x_5	0.999999998549667
x_6	1.000000000000000

Konvergerer fort dette her. △

Som du ser i eksemplet over, dobles antall korrekte desimaler etter hver iterasjon.

Eksempel 4.66. Nå prøver vi å finne løsningene til

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = 0.$$

Nok en gang er det et lettfaktorisert polynom:

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = (x-1)^2(x-3)(x-4)$$

Newtons metode blir:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 9x_n^3 + 27x_n^2 - 31x_n + 12}{4x_n^3 - 27x_n^2 + 54x_n - 31}$$

Nok en gang leter vi etter $r = 1$, ved å starte i $x_0 = 0.5$:

x_0	0.500000000000000
x_1	0.713414634146341
x_2	0.842942878437971
x_3	0.916937117337936
x_4	0.957125910632705
x_5	0.978193460613942
x_6	0.988999465124112
x_7	0.994474755305802
x_8	0.997231047313292
x_9	0.998613930094898
x_{10}	0.999306565270834

Det ser ut til å konvergere, men mye saktere enn i sted. Hva skjedde? △

I eksemplet over er $f'(1) = 0$. Dette betyr at

$$g'(1) = -\frac{f(1)f''(1)}{(f'(1))^2}$$

ikke er definert. Grensen

$$\lim_{x\to 1} g'(x)$$

trenger ikke være null, og eksemplet demonstrerer tydelig at den kvadratiske konvergensen ikke kan garanteres dersom $f'(r) = 0$.

Oppgaver

20. La

$$f(x) = x^n$$

der n er et heltall.

Er $f \in C([0,1])$?

Er $\lim_{n\to\infty} f(x) \in C([0,1])$?

21. La

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Er

$f \in C(\mathbb{R})$?

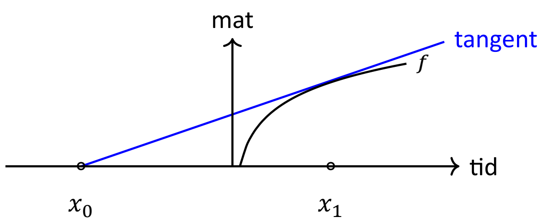
$f \in C^1(\mathbb{R})$?

$f \in C^2(\mathbb{R})$?

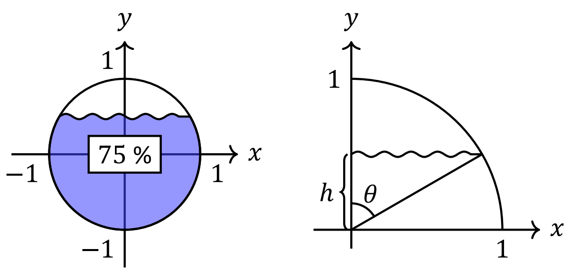
22. Følgende er en modell for matauk, og kalles marginalverditeoremet (marginal value theorem).

En stær mater ungene sine ved å plukke mark fra et sted i nærheten. La $x = x_0$ være tidspunktet den forlater redet, og $x = 0$ tiden den ankommer stedet der den plukker mark. Funksjonen f beskriver hvor mye mat den får med seg. Denne kurven flater ut når tiden øker, for etterhvert som stæren fyller nebbet med mark, blir det vanskeligere og vanskeligere å fange nye mark.

Stæren ønsker å maksimere forholdet mellom total tid borte fra redet og mengde hjembrakt mat. Tidspunktet $x = x_1$ når den setter nebbet hjemover, er tidspunktet når dette forholdet er maksimert. Vis at tangenten til f i x_1 skjærer x-aksen i x_0.



23. La h være vannstanden i et kloakkrør med radius 1 m, og la $h = \cos\theta$.



Vis at når vannet fyller 75 % av røret, løser θ ligningen

$$2\sin 2\theta + \pi - 4\theta = 0,$$

og skriv et enkelt pythonscript som bruker Newtons metode eller fikspunktiterasjon til å finne vannstanden h.

(Figuren i denne oppgaven er laget av Marius Thaule.)

24. Det er vanlig å modellere forholdet mellom strøm og spenning gjennom en diode ved Shockleys diodelov:

$$i(v) = i_0\left(e^{\frac{qv}{nkT}} - 1\right)$$

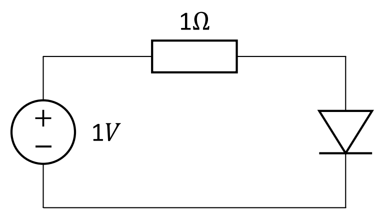
Konstanten i_0 kalles gjerne reversstrømmen (det kan faktisk gå bittelitt strøm i diodens sperreretning uten at den ryker). Denne, samt temperaturen T (i kelvin), elektronladningen q, Boltzmanns konstant $k \approx 1.38\cdot 10^{-23}$ J/K og idealitetsfaktoren n er ikke så viktige for oss, så disse kan Lars ta seg av. Vi er mest interesserte i den matematiske oppførselen til likningen, og derfor setter vi både $\frac{q}{nkT} = 1$ og $i_0 = 1$ slik at likningen blir

$$i(v) = e^v - 1$$

for det blir så greit. Dersom du nå inverterer denne funksjonen og summerer spenningsfallet over kretsen under, vil du få likningen

$$1 = i + \ln(i+1).$$

Denne kan ikke løses analytisk. Bruk fikspunktiterasjonen og Newtons metode til å finne strømmen, og noter deg hvor mange iterasjoner som trengs for hver metode.



25. Vi vet jo at det kan være vanskelig å finne nullpunktene til et polynom, selv om algebraens fundamentalteorem garanterer at de finnes. Her kan fikspunktiterasjonen være til hjelp. Faktoriser polynomet

$$x^3 + x^2 - 3x - 3.$$

26. Likningen

$$x \ln x = 1$$

kan skrives om til formen

$$x = g(x)$$

på minst to forskjellige måter. Finn de to åpenbare, og prøv fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

på begge.

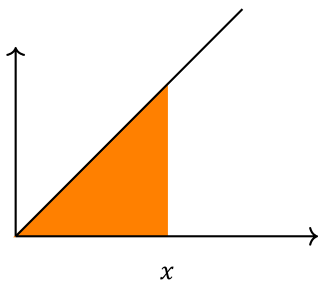
Kapittel 5

Integralet

Integrasjon er som ketsjup. Det kan brukes til alt. Vi kan beregne areal, volum, arbeid, kraft, trykk, massesenter, væskeflyt og elektrisk ladning.

La f være en begrenset funksjon på et intervall $[a, b]$. Det store spørsmålet er å finne arealet under grafen til f. Det går an å ta en lang diskusjon om hva areal egentlig er, sette opp aksiomer for areal, og så utlede integrasjonsteorien fra dem. Dette er imidlertid en litt langdryg prosess, så vi skal basere relasjonen mellom integralet og arealet under grafen på geometrisk intuisjon.

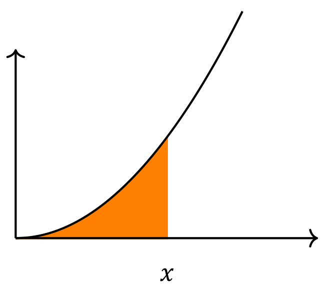
Eksempel 5.1. Noen integraler kan vi enkelt beregne geometrisk. La $f(x) = x$. En rask titt på grafen forteller at arealet under denne grafen og mellom 0 og x er $\frac{1}{2}x^2$, siden dette er en rettvinklet trekant der høyde og bredde er x. △



Eksempel 5.2. La $(x) = x^2$. Arealet under grafen er $\frac{1}{3}x^3$. Dette ble oppdaget geometrisk av Arkimedes for over to tusen år siden. Han oppdaget det ved å dele inn området i bitte små trapeser, og bruke at

$$1 + 4 + 9 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

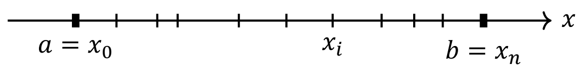
Vi skal gjøre en liknende beregning litt lenger ned. △



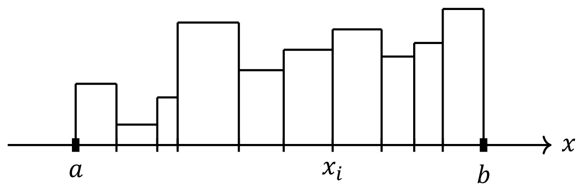
Integralet

For å bygge opp integralteorien er det essensielt å starte med begensede funksjoner på lukkede intervaller. Det går an å utvide integrasjonsteorien til ubegrensede funksjoner og ubegrensede intervaller, og det skal vi se på så vidt til slutt i kapitlet.

Definisjon. En partisjon P av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i, der $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.



Definisjon. En stegfunksjon er en stykkvis konstant funksjon, som tar verdien f_i på intervallet $[x_{i-1}, x_i)$.



Merk at vi kan skrive en stegfunksjon som en lineærkombinasjon av enhetssprangfunksjoner. Dette er som oftest ikke en hensiktsmessig notasjon, og det er enklere å bruke delt forskrift.

$$f(x) = \begin{cases} f_1 & x \in [x_0, x_1) \\ f_2 & x \in [x_1, x_2) \\ \vdots & \\ f_n & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

Forbundet med en stegfunksjon er summen

$$s = \sum_{n=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

som beskriver arealet under grafen til stegfunksjonen.

> Definisjon. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a,b]$. La
> $$m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
> og
> $$M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$
> En øvre riemannsum er
> $$U(P) = \sum_{n=1}^{n}(x_i - x_{i-1})M_i,$$
> og en nedre riemannsum er
> $$L(P) = \sum_{n=1}^{n}(x_i - x_{i-1})m_i.$$

Det er ikke veldig vanskelig å vise at
$$U(P) - L(P) \geq 0$$
for alle partisjoner P, og at
$$U(P') \leq U(P) \quad \text{og} \quad L(P') \geq L(P)$$
dersom $P \subset P'$, altså at P' inneholder alle punktene i P, og minst ett ekstra punkt. Vi sier da at P' er en finere partisjon enn P.

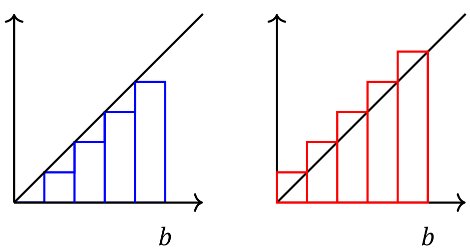
> Definisjon. La f være en begrenset funksjon på $[a,b]$. Dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a,b]$ slik at
> $$U(P) - L(P) < \epsilon,$$
> sier vi at f er integrerbar.

Dersom f er begrenset, er det klart at mengden av alle nedre riemannsummer må ha en minste øvre skranke, og at mengden av alle nedre riemannsummer må ha en største nedre skranke. Dersom f er integrerbar, er det heller ikke så vanskelig å se at disse må være like. Dette tallet skriver vi
$$\int_a^b f(x)\,dx,$$
og vi har at
$$L(P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(P)$$
for alle partisjoner P. Noen ganger ønsker man å uttrykke seg mer konsist, og da skriver man bare
$$\int_a^b f.$$
Det kan være ganske vanskelig å avgjøre hvilke funksjoner som er integrerbare direkte fra definisjonen, men noen eksempler er mulig å regne ut.

Eksempel 5.3. La f være funksjonen
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$
Denne er diskontinuerlig overalt, og ikke integrerbar. Siden $m_i = 0$ og $M_i = 1$ for alle i og alle partisjoner, er det klart at det ikke finnes partisjoner slik at
$$U(P) - L(P) < \epsilon$$
dersom $\epsilon < 1$. Dette eksemplet kan fremstå som noe patologisk, men vi skal se i et senere kapittel at denne funksjonen kan konstrueres ved hjelp av cosinusfunksjonen og to grenseverdiprosesser. △

Dette er ikke mulig å gjøre for mange funksjoner, og i neste avsnitt skal vi se at vi kan bruke antiderivasjon istedet. Men det er viktig å forstå riemannsummer når man skal igang med fysiske anvendelser av integrasjon, så vi tar med et eksempel.

Eksempel 5.4. Vi beregner
$$\int_0^b x\,dx.$$
La oss ta en jevn partisjon, der punktene er gitt ved:
$$x_k = \frac{bk}{n}.$$
Vi beregner en typisk nedre riemannsum:
$$\begin{aligned}\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k &= \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} = \frac{b^2}{2}\frac{(n-1)}{n}\end{aligned}$$
Her er en øvre:
$$\begin{aligned}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k &= \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{bk}{n} = \frac{b^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{b^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}\frac{(n+1)}{n}\end{aligned}$$
Vi kan nå sjekke at $f(x) = x$ er integrerbar. Velg $\epsilon > 0$. En rask kikk på
$$U(P) - L(P) = \frac{b^2}{2}\left(\frac{(n+1)}{n} - \frac{(n-1)}{n}\right) = \frac{b^2}{n}$$
forteller at dersom vi velger
$$n > \frac{b^2}{\epsilon}$$
har vi
$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$
og siden
$$\frac{b^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \frac{b^2}{2}$$
ser det ut til at integralet blir $\frac{b^2}{2}$. △



Eksempel 5.5. Vi beregner

$$\int_0^b x^2\, dx.$$

på samme vis. La partisjonen være

$$x_k = \frac{bk}{n}.$$

Vi beregner en typisk nedre riemannsum:

$$\begin{aligned}\frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 = \frac{b}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b^2k^2}{n^2} &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2\\ &= \frac{b^3}{n^3}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\\ &= \frac{b^3}{6}\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\end{aligned}$$

Her er en øvre:

$$\begin{aligned}\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b^2k^2}{n^2} &= \frac{b^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\\ &= \frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= \frac{b^3}{6}\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\end{aligned}$$

Vi kan nå sjekke at $f(x) = x$ er integrerbar. Velg $\epsilon > 0$. En rask kikk på

$$\begin{aligned}U(P) - L(P) &= \frac{b^3}{6}\left(\frac{2n^3+n^2+n}{n^3} - \frac{2n^3-n^2+n}{n^3}\right)\\ &= \frac{b^2}{6}\frac{2n^2}{n^3} = \frac{b^2}{3n}\end{aligned}$$

forteller at dersom vi velger

$$n > \frac{b^2}{3\epsilon}$$

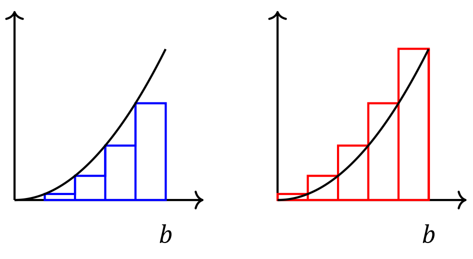
har vi

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

og siden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\frac{2n^3+n^2+n}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{6}\frac{2n^3-n^2+n}{n^3} = \frac{b^3}{3}$$

ser det ut til at integralet blir $\frac{b^3}{3}$. △



Nå er det viktig å ikke fortvile. Det er ingen som beregner integraler på denne måten, men beregningen over er interessant, fordi den ble gjort av Arkimedes omtrent to tusen år før Newton og Leibniz oppfant integralregningen. Nå kommer en serie med små teoremer.

Teorem 5.6. For integralet gjelder følgende:

1 Dersom f er begrenset og stykkvis kontinuerlig på $[a, b]$ med et endelig antall diskontinuiteter, er f integrerbar på $[a, b]$.

2 Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$, finnes en $c \in [a, b]$ slik at

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f\, ds.$$

3 Dersom f_1 og f_2 er integrerbare funksjoner, og c_1 og c_2 vilkårlige konstanter, er

$$\int_a^b c_1f_1(x) + c_2f_2(x)\, dx = c_1\int_a^b f_1(x)\, dx + c_2\int_a^b f_2(x)\, dx.$$

4 Dersom f_1 og f_2 er integrerbare funksjoner og $f_1 \le f_2$, er

$$\int_a^b f_1(x)\, dx \le \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

5 Dersom $|f| \le M$ på $[a, b]$, er

$$\left|\int_a^b f\, dx\right| \le M(b-a).$$

6 Dersom f er integrerbar, er $|f|$ integrerbar, og

$$\left|\int_a^b f\, dx\right| \le \int_a^b |f|\, dx.$$

7 Dersom f er integrerbar og $c \in (a, b)$, er

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

8 Dersom f er integrerbar, er

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Bevisene for disse teoremene er enten så lette at de ikke er spesielt interessante å lese, eller så vanskelige at vi ikke kan gjøre dem i dette kurset.

Egenskap 1 er ikke mulig å vise med det vi har gjort til nå i kurset. Man må bevise at en begrenset og kontinuerlig funksjon er såkalt uniformt kontinuerlig, og ta det derfra. En funksjon er uniformt kontinuerlig på $[a, b]$ dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en δ slik at

$$0 < |x-y| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

for alle $x, y \in [a, b]$.

Egenskap 2 er en versjon av sekantsetningen, men for integraler. Den kalles gjerne middelverdisatsen. Navnet kommer av at uttrykket

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f\ ds$$

gir middelverdien f, i den forstand at dersom f byttes ut med en konstant funksjon med denne verdien, får integralet den samme verdien. Middelverdisatsen sier at f må innom denne verdien på vei fra a til b. Denne er ikke så vanskelig å bevise, og følger av skjæringssetningen. Prøv selv!

Egenskap 3-7 følger av en serie litt kjedelige resonnementer basert på riemannsummer. Hvis du plukker opp en tilfeldig bok i envariabel funksjonsteori, vil du finne dem der.

Egenskap 8 handler egentlig om konvensjon. Dersom vi tillater $b < a$ i definisjonen av partisjoner, blir

$$x_i - x_{i-1} < 0$$

for alle i, slik at riemannsummene bytter fortegn i forhold til f. Dette kan vi bruke til å definere presist hva vi mener med

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

når $b < a$. Det blir da relativt enkelt å bevise egenskap 8.

Integrasjon og derivasjon

> Teorem 5.7. Dersom f er integrerbar på $[a,b]$, er
>
> $$F(x) = \int_a^x f(s)\ ds$$
>
> en kontinuerlig funksjon på $[a,b]$.

Bevis. Velg $\epsilon > 0$, og anta $|f| \leq M$. Da er

$$|F(x)| \leq M(b-a)$$

og følgelig er

$$\left|F(x) - F(y)\right| \leq \left|\int_x^y f\ ds\right| \leq M|x-y|.$$

Dersom vi velger

$$|x-y| < \frac{\epsilon}{M},$$

er

$$|F(x) - F(y)| \leq M|x-y| < \epsilon,$$

slik at F er kontinuerlig i x. □

Integrasjon og derivasjon er på sett og vis inverse operasjoner, og det finnes en stor klasse av integrerbare funksjoner som har en antiderivert. Når man lærer integrasjon på skolen, blir man egentlig oppdratt til å tro at integrasjon er det samme som antiderivasjon. Dette er et forenklet bilde av virkeligheten, for integrasjon er mye mer enn bare antiderivasjon. Men det er allikevel praktisk å kunne beregne integraler ved å antiderivere.

> Teorem 5.8. La f være en kontinuerlig i $x = c \in [a,b]$. Da er
>
> $$F(x) = \int_a^x f(s)\ ds$$
>
> deriverbar i $x = c$, og
>
> $$F'(c) = f(c).$$

Bevis. Vi beregner

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(s)\ ds - \int_a^x f(s)\ ds \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\ ds \\
&= \lim_{h\to 0} f(c) = f(x)
\end{aligned}$$

siden det for hver h må finnes en $c \in [x, x+h]$ slik at

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\ ds = f(c).$$ □

Det neste teoremet kalles gjerne analysens fundamentalteorem.

> Teorem 5.9. La f være integrerbar på $[a,b]$. Dersom det finnes en funksjon F slik at $F' = f$, er
>
> $$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Bevis. Velg en partisjon P.Hvis vi bruker sekantsetningen på hvert delintervall, kan vi for hvert intervall finne en y_i slik at

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(y_i)((x_i - x_{i-1}),$$

og dersom vi legger sammen alle disse likningene, får vi

$$F(b) - F(a) = \sum_i f(y_i)((x_i - x_{i-1}).$$

Siden $m_i \leq f(y_i) \leq M_i$ for alle i, må

$$L(P) \leq \sum_i f(y_i)((x_i - x_{i-1}) \leq U(P)$$

og følgelig er også

$$L(P) \leq F(b) - F(a) \leq U(P).$$

Dette gjelder altså for alle partisjoner P. Nå er det kun ett tall som er større enn $L(P)$ og mindre enn $U(P)$ for alle P, nemlig

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

så dersom $F(b) - F(a)$ også skal ha denne egenskapen, må

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$ □

Eksempel 5.10. Siden polynomer er kontinuerlige, må åpenbart

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},$$

siden

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n.$$

Dette gjelder også for $n \in \mathbb{R}$, men dette er litt mer jobb å vise. △

Eksempel 5.11. Siden

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x,$$

må

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a. \quad △$$

Eksempel 5.12. Det finnes funksjoner som ikke har noen antiderivert som er enkel å skrive opp, for eksempel

$$f(x) = \exp(x^2),$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x},$$

og

$$h(x) = \sqrt{1+x^4}.$$

Disse er integrerbare på alle lukkede intervaller. De antideriverte kan skrives som uendelige rekker, som vi skal se i kapitlet om rekkeutvikling. △

Vi tar med to regneregler for integrasjon som er umiddelbare konsekvenser av analysens fundamentalteorem.

Teorem 5.13. La $F = f'$ og $G = g'$ på $[a,b]$. Dersom f og g er integrerbare, er

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)\,dx.$$

Bevis. Dette følger av analysens fundamentalteorem og produktregelen for derivasjon:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x)G(x) &= F(x)G'(x) + F'(x)G(x)\\ &= F(x)g(x) + f(x)G(x).\end{aligned} \quad \square$$

Teorem 5.14. Anta at f er kontinuerlig på $[c,d]$, at $F' = f$ på $[c,d]$ og at u er deriverbar på $[a,b]$, med $u(a) = c$ og $u(b) = d$. Da er

$$\begin{aligned}F(u(b)) - F(u(a)) &= \int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx\\ &= \int_c^d f(u)\,du.\end{aligned}$$

Bevis. Dette følger av analysens fundamentalteorem og kjerneregelen for derivasjon:

$$\frac{d}{dx}F(u(x)) = f(u(x))u'(x). \quad \square$$

Til slutt tar vi med en variant som kalles taylors teorem.

Teorem 5.15. La f være en $n+1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x. Da er

$$\begin{aligned}f(x) = \\ f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n\\ + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-s)^n f^{n+1}(s)\,ds\end{aligned}$$

Eksempel 5.16. En ellipse med halvakser a og b er mengden av alle punkter som tilfredsstiller likningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Vi kan bruke integrasjon til å vise at arealet til ellipsen er gitt ved πab. Den øvre delen av ellipsen er grafen til funksjonen $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

og ved hjelp av substitusjonen $x = a\sin\theta$ kan vi beregne arealet:

$$\begin{aligned}A &= 4b\int_0^a \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx\\ &= 4b\int_0^{\pi/2} i\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2\theta}{a^2}}\,a\cos\theta\,d\theta\\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta\\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\\ &= 4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta = \pi ab\end{aligned}$$

Dersom $a = b = r$ er dette en sirkel med radius r, og arealet blir πr^2. △

Numerisk integrasjon

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen e^{-x^2} har ingen antiderivert, og andre funksjoner har så kompliserte antideriverte at det ikke er vits i å prøve en gang. Riemannsummer kan brukes som utgangspunkt for å designe noen enkle metoder for numerisk integrasjon.

Eksempel 5.17. Man kan bruke riemannsummer til å tilnærme integraler. Dersom en f er strengt voksende på

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)}\,dx = \\
&-\Bigg(\Bigg(\log(\cos(x))\left(2\operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right) - 2\operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)-(1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)\right) + \\
&\quad 2\operatorname{Li}_2\left(-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\operatorname{Li}_2\left(-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\operatorname{Li}_2\left(i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + 2\operatorname{Li}_2\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\operatorname{Li}_2\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\right) + 2\operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1-i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1+i)\right)\right) - 2\operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\left((1+i)\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+(1-i)\right)\right) + \\
&\quad \log^2\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right) + \\
&\quad 4\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \log(4)\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(1-i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - 2\log\left(1+i\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\right)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)\right) - \\
&\quad \log(4)\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right) + \log\left(\tan^2\left(\tfrac{x}{2}\right)-1\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) - \\
&\quad 2\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)-i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right) + \\
&\quad \log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+i\right)\log\left(\cos(x)\sec^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\Bigg)\Bigg/ \\
&\left(4\left(\log\left(1-\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)+\log\left(\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)+1\right)+\log\left(\cos^2\left(\tfrac{x}{2}\right)\right)\right)\right)\Bigg) + \text{constant}
\end{aligned}
$$

intervallet $[a, b]$, og punktene i en jevn partisjon P gitt ved

$$a + \frac{b-a}{n} i$$

der $0 \leq i \leq n$, er øvre riemannsum gitt ved

$$U(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

og nedre riemannsum gitt ved

$$L(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Dersom f ikke er strengt voksende på $[a, b]$, er uttrykkene over ikke nødvendigvis riemannsummer, men de representerer fremdeles numeriske metoder for å tilnærme integralet:

$$L(P) \approx U(P) \approx \int_a^b f \qquad \triangle$$

Eksempel 5.18. Dersom man tar gjennomsnittet av uttrykkene i forrige eksempel, får man trapesregelen:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f &\approx \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Denne er noe mer nøyaktig enn riemannsummer, og vi skal senere i semesteret se hvorfor. △

Eksempel 5.19. Dersom man tar evaluerer f midt mellom punktene i partisjonen, istedet for i endepunktene, får man midtpunktregelen:

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

Denne er også noe mer nøyaktig enn riemannsummer. △

Det går selvfølgelig an å implementere disse metodene med ujevne partisjoner, men det er ikke så viktig for oss i dette semesteret.

Uegentlige integral

Et integral definerer en funksjon

$$F(x) = \int_a^x f$$

og det er ingenting i veien for å beregne

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^x f.$$

Dersom

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty,$$

kan vi også beregne

$$\lim_{x\to c} \int_a^x f.$$

Disse kalles uegentlige integraler. Dersom grenseverdiene eksisterer, sier vi at integralene konvergerer.

Eksempel 5.20.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \log a = \infty \qquad \triangle$$

Eksempel 5.21.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = 1 \qquad \triangle$$

Eksempel 5.22.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} -\log a = \infty \qquad \triangle$$

Eksempel 5.23.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \frac{1}{a} - 1 = \infty \qquad \triangle$$

Eksempel 5.24.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2 \qquad \triangle$$

Definisjon. Vi sier at $\int_a^b f$ er absolutt konvergent dersom $\int_a^b |f|$ er konvergent.

Eksempel 5.25. Integralet

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$$

er absolutt konvergent, siden

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1. \qquad \triangle$$

Uegentlige integraler åpner opp for noe som kalles integraltesten. Det er en test for å avgjøre om et integral og en korresponderende rekke konvergerer.

> **Teorem 5.26.** La f være en begrenset funksjon. Integralet
> $$\int_a^\infty f(x)\,dx$$
> og rekken
> $$\sum_{n=a}^{\infty} f(n)$$
> er enten begge konvergente, eller begge divergente.

Eksempel 5.27. Nå er det litt enklere å avgjøre om for eksempel

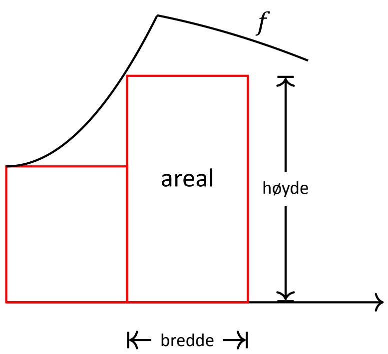
$$\sum \frac{1}{1+n^2}$$

konvergerer, for vi kan beregne

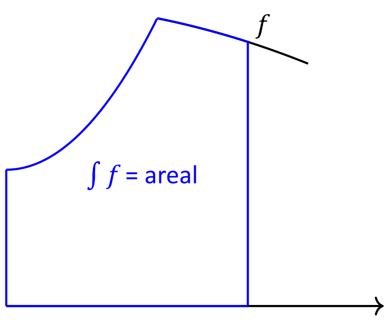
$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to\infty} \arctan x - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}. \qquad \triangle$$

Volum

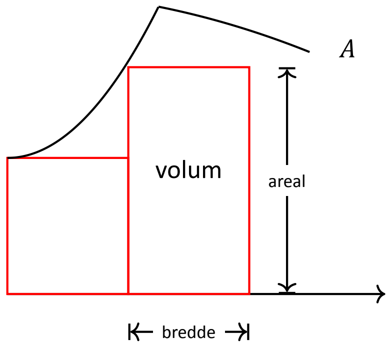
Til nå har vi brukt integralet til å beregne areal. I et bestemt rektangel i en riemannsum, representerer bredden bredden i et rektangel, og høyden høyden i et rektangel. Arealet til rektangel representerer da nettopp arealet til et rektangel:



Dermed vil $\int f$ representere et areal:



Men en av integralets mange styrker, er at de to lengdene som har representert høyde og bredde til nå, fint kan representere helt andre ting. I dette avsnittet skal vi tenke at man har en funksjon $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ der funksjonsverdiene beskriver areal, og x-aksen beskriver lengde. Da vil både riemannsummene og $\int A$ representere volum:



Eksempel 5.28. En pyramide har et kvadratisk tverrsnitt med sidekant gitt ved

$$s(x) = b - x,$$

der x er høyden til tverrsnittet, og b er den totale høyden til pyramiden. Arealet til tversnittet er

$$A(x) = (b-x)^2,$$

og volumet blir

$$V = \int_0^b (b-x)^2\,dx = \left(-\frac{(b-x)^3}{3}\right)_0^b = \frac{b^3}{3}. \qquad \triangle$$

Et av de enkleste eksemplene å visualisere, kalles omdreiningslegemer. Anta at du har en funksjon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, og dreier grafen en gang rundt x-aksen. Da vil du få et legeme med sirkulært tverrsnitt. Arealet av tverrsnittet for en gitt x-verdi er gitt ved

$$A(x) = \pi\,(f(x))^2 = \pi f^2(x).$$

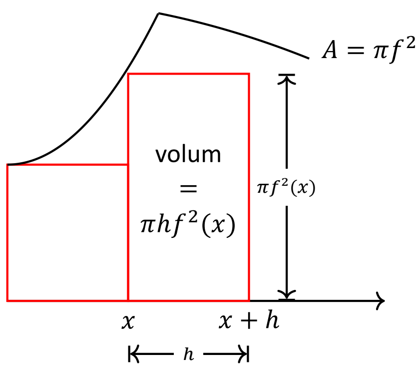
Man kan da tenke at dette er høyden i en riemannsum. Et rektangel i en riemannsum blir

$$\pi h f^2(x),$$

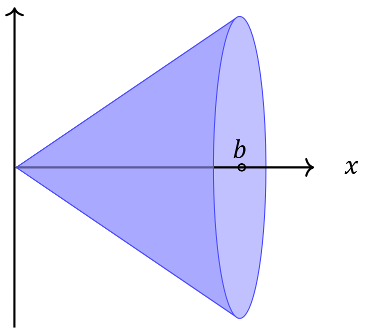
og dette representerer nå et volum. Totalvolumet til omdreiningslegemet er gitt ved

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Her er en figur som illustrerer riemannsummene:



For å illustrere hvordan volumet kan se ut i virkeligheten, er her omdreiningslegemet som fremkommer ved å dreie funksjonen $f(x) = x$ på intervallet $[0,b]$:



Eksempel 5.29. Omdreiningslegmet i figuren over har volum gitt ved

$$V = \pi \int_0^b x^2 \, dx = \frac{\pi b^3}{3}.$$

Dette kjenner vi igjen som volumet til en kjegle. Alle pyramider og kjegler har volum på formen $\frac{1}{3}Ah$, er h er høyden, og A er grunnflatens areal. △

Eksempel 5.30. Et artig eksempel kalles Gabriels trompet. Vi roterer funksjonen $f : [1, \infty] \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om x-aksen. Volumet av dette legemet er

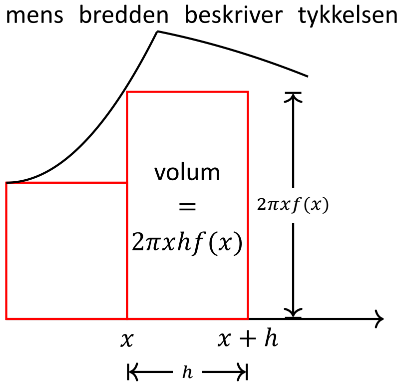
$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \pi.$$

Eksemplet kalles Gabriels trompet fordi rotasjonslegemet ser ut som en uendelig lang trompet. △

Dersom vi roterer $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ rundt y-aksen, får vi et annet omdreiningslegeme, hvis areal kan beregnes ved noe som kalles sylinderskallmetoden. Man tenker at høyden i riemannsummen beskriver arealet av et sylinderskall

$$A(x) = 2\pi x f(x)$$

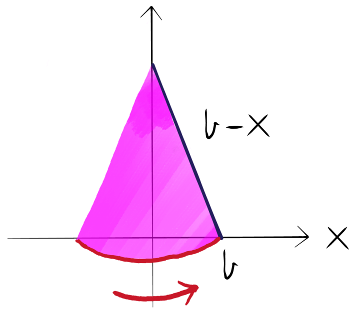
mens bredden beskriver tykkelsen av sylinderskallet:



Volumet blir

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx.$$

Her er en illustrasjon av hvordan dette ser ut. Den roterte funksjonen er $f(x) = b - x$ på intervallet $[0, b]$.



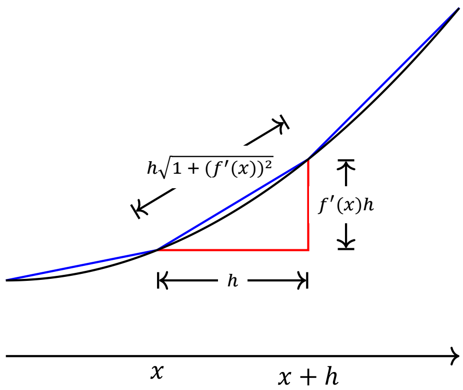
Eksempel 5.31. Volumet i figuren over blir

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^b x f(x) \, dx \\ &= 2\pi \int_0^b x(b - x) \, dx \\ &= 2\pi \left(\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)_0^b \\ &= 2\pi \left(\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3} \right) = \frac{\pi b^3}{3}. \end{aligned}$$

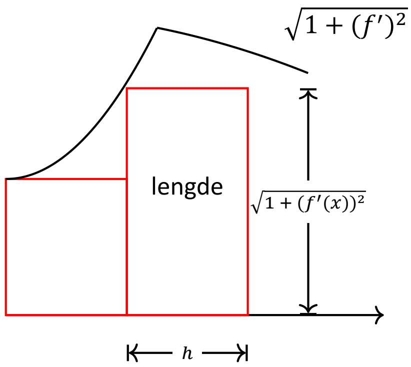
△

Buelengde

Vi kan bruke integralet til å beregne lengden til kurven gitt ved $y = f(x)$ der $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Trikset er å se på en kurve bestående av sekantbiter til f:



Hvis du tenker riemannsummer, blir den korresponderende figuren slik:



Lengden av kurven fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Eksempel 5.32. La $b > 0$. Vi beregner lengden til kurven $y = x^2$, fra $(0,0)$ til (b, b^2):

$$\int_0^b \sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_0^b \sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx =$$
$$b\sqrt{\frac{1}{4}+b^2}+\frac{1}{4}\left(\ln\left(b+\sqrt{\frac{1}{4}+b^2}\right)+\ln 2\right).$$

Dette integralet måtte jeg slå opp i en tabell. Du trenger ikke huske det til eksamen. Å finne buelengden til selv enkle funksjoner, kan være ganske hardt. Slik er livet. △

Oppgaver

27. La n være et heltall. Finn arealet avgrenset av $y = x^n$, $y = 0$ og $x = 1$.

28. Finn arealet avgrenset av $y = x^n$, $y = 1$ og $x = 0$.

29. Er $f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n$ riemannintegrerbar?

30. Finn arealet under en enkelt sinusbølgehump.

31. Finn buelengden til $y = x^{3/2}$ mellom $x = 1$ og $x = 2$.

32. En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^2$ er en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$
\begin{aligned}
x &= f(t) \\
y &= g(t)
\end{aligned}
$$

der $a \leq t \leq b$. Finn uttrykket for buelengden. (Hint: se på figuren under, og kopier resonnementet for buelengden til $y = f(x)$.