

Determinanter

I denne øvingen skal vi se på en enkel metode for å avgjøre om lineære likningssystemer (med like mange ukjente som likninger) har en løsning, og hvorvidt den er entydig.

Lesestoff

- 6 herfra:
<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/lin-alg.pdf>
- Kreyszig 7.7
- Openstax College Algebra 7.8
- Lay 3

I forrige bolk løste vi systemene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 3 \end{array} \right]$$

og

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 3 \end{array} \right]$$

og

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 6 \end{array} \right]$$

og

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

- 1] Alle punkter (x, y, z) som passer i likningen

$$ax + by + cz = d$$

ligger på ett og samme plan i rommet. (Dette lærte du på skolen.) Bruk dette til å forklare alt som skjedde i systemene ovenfor, og forklar hvordan du kan se om et når et 3×3 -likningssystem har entydig løsning.

Gå nå på nettet og finn ut hva en determinant er og hvordan man beregner den.

- 2] Forklar hvorfor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

har entydig løsning. (Hint: Gå på egnelsk wikipedia, søk opp determinant, scroll deg ned til Cramers regel. Det står der.)

3 Avgjør om likningssystemene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 3 \end{array} \right]$$

og

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

har entydig løsning.

4 Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ d & e & n \end{array} \right]$$

5 Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & m \\ d & e & f & n \\ g & h & i & o \end{array} \right]$$

Noen ganger kan det være litt pjask å skrive opp alle løsningene selv om likningssystemet ser enkelt ut.

6 Løs likningssystemet

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Fasit

$$A: x = \frac{em-bn}{ad-bc}, y = \frac{an-md}{ad-bc}$$

3: Ingen av dem har. Determinanten er null, og da er det enten ingen løsning eller uendelig mange.

2: Determinanten er forskjellig fra null. Dette impliserer entydig løsning.