

Integralet V

Nå skal vi bruke integrasjon til å regne ut et par andre ting.

Integralet kan brukes til alt.

Nå skal vi regne ut volum. Dersom du har en funksjon som beskriver tverrsnittet av et objekt som funksjon av høyden eller liknende:

- 1 En pyramide har høyde 1 og kvadratisk grunnflate med sidekant 1. Finn en funksjon som beskriver arealet av tverrsnittet som funksjon av høyden. (Tegn det opp.)

kan man finne volumet av dette objektet ved å integrere:

- 2 Finn volumet av pyramiden.

Dersom vi tar grafen til en funksjon $y = f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$ og dreier den en gang om x -aksen, får vi et omdreiningslegeme. Volumet av dette kan beregnes på slikt vis.

- 3 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at volumet blir

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

(Hint: tenk sirkelskive.)

Det hender at studenter lurer på hvorfor man skal lære omdreiningslegemer. Den er flere viktige grunner til å lære dette. En av dem er at man må trene på riemannsumtankegangen, for ellers blir det veldig vanskelig å forstå fysikk. De folkene integrerer jo hele tiden. En annen grunn er at det blir mye lettere å skjønne dobbeltintegraler i tredje semester. Nå tar vi en klassiker.

- 4 Vi roterer funksjonen $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

om x -aksen. Hva blir volumet?

Eksemplet over kalles Gabriels trompet. Den er uendelig lang, men har volum π . Du kan med andre ord bruke den som malingsspann og fylle den med maling.

Men kan du male den på utsiden? Hvis vi dreier ting rundt x -aksen, kan vi også regne overflatearealet til omdreiningslegemet som oppstår.

- 5 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at overflatearealet til omdreiningslegemet blir

$$V = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(Hint: tenk sirkel og kombiner med forrige ukes visdom om buelengde.)

- 6 Du bruker Gabriels trompet som malingsspann. Er det nok maling i spannet til å male trompetens overflate?

Vi kan også dreie funksjoner om y -aksen.

- 7 Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at hvis du dreier en funksjon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ om y -aksen, blir volumet

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(Hint: tenk tynne sylinderskiver. Det blir også lettest å visualisere om man holder seg til $f \geq 0$ og $0 \leq a < b$.)

- 8 Jorden er som alle vet, uendelig stor og nesten flat. Den lille horisontkrummingen du ser når du er på havet skyldes at jordens overflate har samme form som funksjonen $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dreid om y -aksen. (I midten er det et hull der du kan stige ned til dødsriket.) Jorden har selvfølgelig uendelig stort volum, det vet alle. Vis dette.

- 9 Finn volumet av funksjonen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

dreid om y -aksen, og sammenlikne med oppgave 4.

Påskenøtter

- 10 En beholder med høyde 4 lages ved å rotere kurven $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, om aksene $x = -1$ og sette en plan bunn i. Finn volumet V av beholderen.

- 11 Vis at arealet til en ellipse med halvaksler a og b er πab .

- 12 Vis at volumet til en kule med radius r er $\frac{4\pi}{3}r^3$.

- 13 Siv har en kuleformet vanntank med radius R . På toppen av tanken er det et lite hull. Siv ønsker å finne ut hvor mye vann det er igjen i vanntanken ved å måle avstanden L fra hullet ned til vannoverflaten.

Finn et eksplisitt uttrykk for vannvolumet $V(L)$ for $0 \leq L \leq 2R$.

- 14 Kheopspyramiden hevdes å ha tatt 20 år å bygge. Pyramiden var 146 meter høy da den stod ferdig, og hadde en kvadratisk grunnflate med sidelengde 230 meter.

Anta at steinene brukt til å bygge pyramiden har massetetthet 1920 kg/m^3 . Anta at hver arbeider utførte et arbeid tilsvarende 218 J/h ved å løfte steiner fra bakkenivå til den endelige plasseringen i pyramiden, og at hver arbeider jobbet 12 timer hver dag, 330 dager i året.

Hvor mange arbeidere måtte til for å bygge pyramiden?

- 15 Finnes det et reelt tall p slik at det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$$

konvergerer?