

Mere artige greier

I noen tilfeller kan det la seg gjøre å skrive om likningen $y = f(x)$ til $x = g(y)$.

En funksjon $f : A \rightarrow B$ er injektiv dersom $f(x_1) = f(x_2)$ impliserer at $x_1 = x_2$.

Dersom $f : A \rightarrow B$ er injektiv, kan vi alltid løse likningen $y = f(x)$ for x . Da får vi en likning på formen $x = g(y)$. Funksjonen $g : B \rightarrow A$ kalles den inverse funksjonen, og vi skriver

$$g = f^{-1}.$$

Dersom vi setter g inn i f eller f inn i g , får vi

$$g(f(x)) = f(g(x)) = x.$$

Dersom f ikke er injektiv, finnes det $x_1 \neq x_2$ slik at $f(x_1) = f(x_2)$. Hvis det fantes en invers funksjon g , ville denne måttet ta både x_1 og x_2 som funksjonsverdier i $f(x_1) = f(x_2)$. Dette er ikke lov, og følgelig kan ikke g eksistere.

Dersom vi deriverer likningen

$$f(f^{-1}(x)) = x,$$

med kjerneregelen, får vi

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 1,$$

som gir at

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Anta at f er deriverbar på (a, b) og enten $f' > 0$ eller $f' < 0$ på (a, b) . Da eksisterer f^{-1} , og

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

- 1 Forklar hvorfor f er injektiv dersom $f' > 0$ (eller $f' < 0$.)
- 2 Funksjonen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

er injektiv. Finn og skisser den inverse funksjonen.

- 3 Funksjonen $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sin x$$

er injektiv om du velger A med omhu. Velg en passende A og finn og skisser den inverse funksjonen.

4 Vis at

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{og} \quad \frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

5 Vi roterer funksjonen $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

om x -aksen. Hva blir volumet?

På skolen brukte du uhorvelig mye tid på funksjonsdrøfting. Du husker antagelig at $f'(x) = 0$ dersom x er et maksimums- eller minimumspunkt for f . Men det er noen andre punkter som er lure å sjekke også:

6 Forklar hvorfor f kan ha maksimum der i punkter der f' er diskontinuerlig, eller i endepunktene for definisjonsmengden.

7 Finn lokale maksimum og minimum til funksjonen $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = |x^2 - 3x + 2|.$$

Så vidt jeg vet er ikke Taylors teorem pensum på videregående skole, så dette er antagelig helt nytt. Vi har tidligere sett på Taylors teorem som en generalisering av sekantsetningen, men det kan også ses på som en generalisering av analysens fundamentalteorem.

8 I denne oppgaven skal vi generalisere likningen

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

fra analysens fundamentalteorem.

a) La $u = f'(t)$ og $v = x - t$, bruk delvis integrasjon en gang på

$$\int_a^x f'(t) dt,$$

og sett resultatet inn i analysens fundamentalteorem. Hva får du da?

b) Gjenta prosessen, men nå med $u = f''(t)$, og $v = (x - t)^2/2$. Hva får du da?

c) Har du gjort b) riktig, sitter du igjen med leddet

$$\frac{1}{2} \int_a^x f'''(t)(x - t)^2 dt$$

på slutten. Hva er dette for noe?

Ukens nøtt

7 En superellipse er gitt ved likningen

$$\left(\frac{x}{5}\right)^4 + \left(\frac{y}{3}\right)^4 = 1.$$

Finn arealet til det største rektangelet som kan tegnes på innsiden av denne kurven.