

## Differensiallikninger III

La oss varme opp med en annen likning du løste på skolen.

1 Finn den generelle løsningen til

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

Hvis du husker tilbake til videregående skole, husker du kanskje at læreren sa at løsningen alltid var

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

og så setter man denne inn i likningen

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + Ab\lambda e^{\lambda t} + Ace^{\lambda t} = 0$$

og observerer at  $A \neq 0$  (dette er en ganske uinteressant løsning) og at  $e^{\lambda t} \neq 0$  (vi vet jo for og bak på eksponensialfunksjonen), og derfor kan vi dele disse ut og få

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

som kalles den karakteristiske likningen. På skolen lærte du så at dersom  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , er

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

og dersom  $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda)$ , sa læreren at løsningene er

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + Bte^{\lambda t}.$$

og dersom den karakteristiske likningen ikke har løsninger, sa læreren at løsningen var

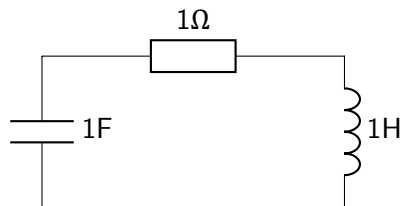
$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}t\right) + Be^{-\frac{b}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}t\right).$$

Hvis du husker algebraens fundamentalteorem, husker du jo at alle polynomer har like mange røtter som ordenen på polynomet, så med andre ord har

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

alltid to løsninger, men de kan være sammenfallende eller komplekse.

2 Ok ok ok, kretsen



modelleres av differensiallikningen

$$\ddot{i} + \dot{i} + i = 0$$

Finn alle mulige strømmen (hvis du ikke har gjort det ennå).

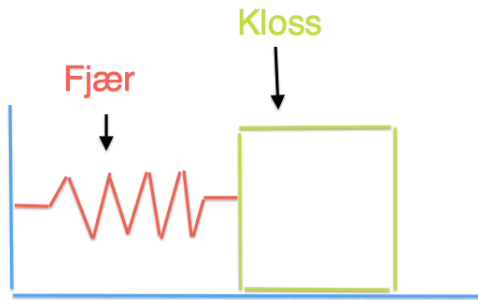
Men hvor kommer alt dette fra?

Newtons andre lov

$$F = m\ddot{x}$$

er arketypen på en andre ordens differensiallikning.

Det klassiske eksemplet er fjær og kloss og vegg:



En ideell fjær følger Hookes fjærlov:

$$F(x) = -kx$$

Her er  $F$  kraften fra fjæren, og  $x$  er hvor langt fjæren er strukket eller komprimert. Konstanten  $k$  sier noe om fjærens stivhet.

- 3 En kloss har masse  $m$  og er festet i vegg som på figuren. Den sklir friksjonsfritt på underlaget. Finn differensiallikningen som modellerer dette, og alle mulige bevegelser.

Som et nytt eksempel på matematikkens samlende kraft, tar vi og koker opp den gamle ertesuppe en gang til.

- 4 Finn differensiallikningen for kretsen, og alle mulige strømmer:

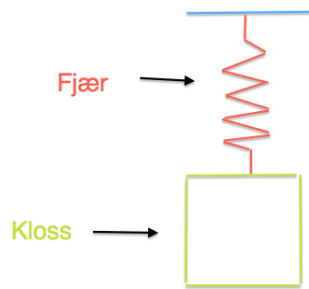


Det er altså slik at fra en matematikers ståsted er

spole+kondensator=kloss+fjær

Massen  $m$  gjør samme jobb som  $L$ , og fjærkonstanten  $k$  er  $\frac{1}{C}$ . Nei så gøy.

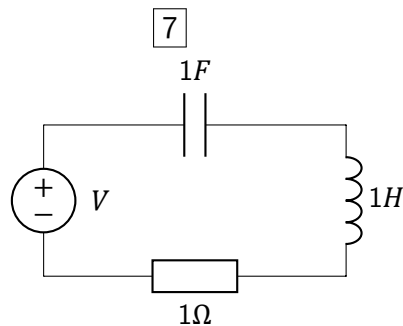
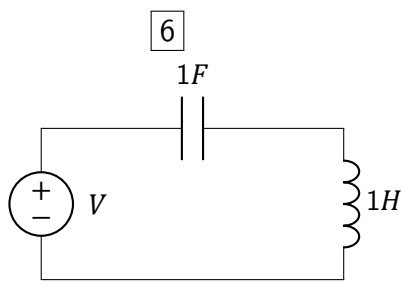
- 5 Dersom klossen henger fra taket:



får du en konstant gravitasjonskraft i tillegg. Skriv opp differensiallikningen for dette, og alle mulige bevegelser.

## Elektronøtter

Finn differensiallikning og alle mulige strømmer i kretsen dersom  $V(t) = e^{j\omega t}$ :



## Dagens fysikknøtt

- 8 En pendel med masse  $m$  henger i en stang fra taket. Den kan svinge friksjonsfritt frem og tilbake, og gravitasjonskraften er eneste kraft. Finn differensiallikningen for  $\theta$ . Hvordan går det å løse dette her?

