

Differensiallikninger IV

Nå er vi endelig der at vi kan sy sammen litt forskjellige ting vi har drevet på med dette semesteret. Det første vi skal gjøre, er å sette opp en litt mer praktisk form på differensiallikninger. La oss begynne med likningen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

og herje litt.

1 Vi lager noen nye variable:

$$z_1(t) = x(t)$$

$$z_2(t) = \dot{x}(t)$$

Hva blir $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ for noe i variablene z_1 og z_2 ?

Hvis du nå aksepterer at vi kan skrive

$$z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$$

og definerer

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \end{bmatrix}$$

går det an å skrive $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ på formen

$$\dot{z} = Az$$

2 Finn A .

Så er spørsmålet, hva skal vi med dette? La oss sakte men sikkert finne ut av sammenhengen mellom $\dot{z} = Az$ og $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

3 Finn egenverdiene til A .

Er det lett å løse $\dot{z} = Az$? La λ være en egenverdi til A , la v være den korresponderende egenvektoren, og la

$$x(t) = e^{\lambda t}v$$

4 Regn ut $\dot{x}$.

5 Regn ut Ax .

6 Hva ser du?

6 Gjelder dette kun for 2×2 -systemer?

En ting er at vi kan løse andre ordens differensiallikninger ved å skrive om til et system av første ordens differensiallikninger. Men vi kan jo også løse systemer av differensiallikninger som ikke kommer fra en likning på formen $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$.

7 La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

og finn løsningene til

$$\dot{z} = Az$$

8 La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

og finn løsningene til

$$\dot{z} = Az$$

Dagens elektronøtter

Av og til er det enkelt å sette systemer av differensiallikninger for kretser. Finn differensiallikning og alle mulige strømmer i kretsene under. (Hint: Bruk maskestrømsmetoden.)

