

Differensiallikninger V

De differensiallikningene vi har studert til nå, kan man stort sett løse med penn og papir. Nå skal vi løse differensiallikninger numerisk. Men la oss begynne med å løse en likning som er mulig å løse med penn og papir.

Newtons avkjølingslov sier at temperaturen T i en kokt elgtunge som settes inn i kjøleskapet (eller ut av kjøleskapet, eller inn i stekeovnen osv), følger initialverdiproblemet

$$\dot{T}(t) + \alpha (T(t) - T_k) = 0 \quad T(0) = T_0,$$

der t er tiden, T_0 er temperaturen til elgtungen i det den settes inn i kjøleskapet, T_k er temperaturen i kjøleskapet, og α er en konstant som avhenger av varmeflyten mellom elgtungen og omgivelsene.

- 1 En elgtunge med temperatur 6°C , settes på kjøkkenbenken. Etter 2 timer er temperaturen steget til 13°C , og lufttemperaturen i kjøkkenet var 20°C .

Sett opp en differensialligning for temperaturen T i elgtungen som funksjon av tiden t , og vis at den har løsning av formen

$$T(t) = A + Be^{-\alpha t}$$

der A er lufttemperaturen. Finn konstantene B og α .

- 2 Da temperaturen var 15°C , ble elgtungen satt inn i kjøleskapet. Etter 1 time var temperaturen i tungen sunket til 12°C . Hva var temperaturen i kjøleskapet? Anta samme α som i forrige oppgave.

Nå vet vi omtrent hva det går i. Men hva om α ikke er et tall, men en funksjon av T ? Proporsjonalitetskonstanten α forteller oss noe om hvor raskt varmen strømmes mellom elgtungen og omgivelsene for en gitt temperaturforskjell. Vi kan derfor forvente at α er avhengig av elgtungens varmekapasitet. Jeg vet ikke om noen har studert varmekapasiteten til en kokt elgtunge, men om vi kjøler ned en krystall, kan vi forvente at varmekapasiteten er sterkt temperaturavhengig:

https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein_solid

https://en.wikipedia.org/wiki/Debye_model#Debye_versus_Einstein

Hvis vi nå gjør det enkelt, og antar at

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

(her er det en haug med fysiske konstanter som er satt til 1 slik av hensyn til din kognitive last) blir Newtons avkjølingslov

$$\dot{T} + \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2} (T - T_k) = 0 \quad T(0) = T_0.$$

Lykke til med å løse denne med penn og papir. Det er her de numeriske metodene kommer inn.

Den aller enkleste metoden kalles Eulers eksplisitte metode. Hvordan funker den? La oss først minne om

Taylors teorem

Dersom f er en $n + 1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x , finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

3 Les kap. 4.9 og 4.10 i Adams.

Dette er som sagt en generalisering av sekantsetningen eller analysens fundamentalteorem (spørst litt hvordan man liker å utlede formelen) og dersom vi setter $n = 1$ får vi:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(s)}{2}(x - a)^2$$

Hvis vi nå velger $(x - a)$ så liten at det siste leddet blir neglisjerbart (dersom $(x - a)$ er liten blir $(x - a)^2$ mye mye mindre), får vi noe som kalles lineærapprosimasjon

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Vel vel. La oss anta at du har et initialverdiproblem

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

du ikke aner hvordan du skal løse med penn og papir. Vel, du vet ihvertfall hva $x(0)$ er. Det er da noe. Men du vet faktisk mer enn det.

4 Du vet også hva $\dot{x}(0)$ er. Hva er det?



Helt riktig:

$$\dot{x}(0) = f(x(0)) = f(x_0)$$

Vi kjenner altså stigningstallet til løsningen i starttidspunktet. Dette er fordi vi kjenner initialbetingelsen, og da forteller differensiallikningen hvilken stigning løsningen starter med. Det betyr at dersom du ønsker en approksimasjon til løsningen litt etter starttidspunktet, kan du bruke lineærapproksimasjon.

Nå er det nok på tide å innføre litt notasjon. La oss velge et lite tidsinkrement h , og sette opp tilnærminger til løsningen slik:

$$\begin{aligned}x_1 &\approx x(h) \\x_2 &\approx x(2h) \\x_3 &\approx x(3h) \\&\vdots\end{aligned}$$

Eulers eksplisitte metode baserer seg på å bruke lineærapproksimasjon for å beregne approksimasjoner på følgende vis:

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + hf(x_0) \quad (= x(0) + h\dot{x}(0)) \\x_2 &= x_1 + hf(x_1) \\x_3 &= x_2 + hf(x_2) \\&\vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

Man tar altså approksimasjonen på et tidspunkt og lineærapproksimerer herfra for å finne approksimasjonen på neste tidspunkt i rekken. Hvis du liker rekursjoner, kan du skrive det slik:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n)$$

Jo mindre h , desto bedre funker det, men det tar lengre tid for datamaskinen å regne på alt sammen. La oss begynne med noe helt banalt.

- 5 La oss sette $\alpha = 1$ og $T_k = 2$ i Newtons avkjølingslov, slik at det blir enkelt:

$$\dot{T} + T - 2 = 0$$

Skriv dette om til formen $\dot{T} = f(T)$ og løs numerisk med initialkrav $T(0) = \frac{1}{10}$. Lag et plott av løsningen.

- 6 La oss nå komplisere det litt, og innføre

$$\alpha(T) = \frac{1}{T^2} \frac{e^{1/T}}{(e^{1/T} - 1)^2}$$

istedet for $\alpha = 1$. Løs numerisk med initialkrav $T(0) = \frac{1}{10}$, og plott denne løsningen i samme figur som løsningen fra forrige oppgave.

Hvis dette gikk fint, kan du gå i kompendiet kap. 6 og lese om Eulers implisitte metode:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1})$$

og trapesmetoden:

$$x_{n+1} = x_n + h \left(\frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2} \right)$$

- 7 Løs initialverdiproblemet

$$\dot{T} + T - 2 = 0 \quad T(0) = \frac{1}{10}$$

numerisk med eksplisitt Euler, implisitt Euler og trapesmetoden. Sammenlikne disse med den analytiske løsningen

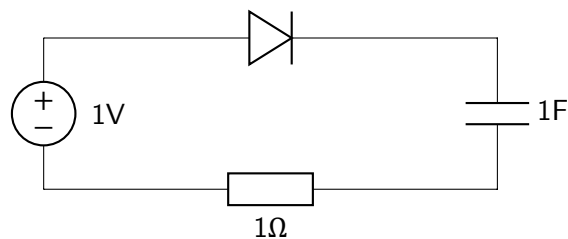
$$T(t) = 2 - \frac{19}{10}e^{-t}$$

Dagens nøtt

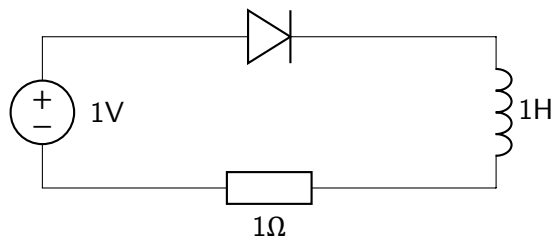
- 8 Løs oppgave 6 med Euler implisitt eller trapesmetoden.

Dagens elektronøtter

- 9 Finn strømmen i kretsen. Anta $i(0) = 1$ og at $i(v) = e^v - 1$ for dioden.



- 10 Finn strømmen i kretsen, med samme antagelser som i forrige oppgave.



- 11 Gjenta oppgavene over med initialkrav $i(0) = 0$.

Dagens teori

La oss begynne med å repetere en oppgave fra en tidligere ert-økt.

- 12 Finn en tilnærming til

$$\int_0^\pi \text{sinc}(x) dx \approx 1.85193705196$$

ved å bruke både riemannsummer og trapesmetoden. Sammenlikne nøyaktigheten mellom metodene når du bruker samme h .

- 13 Ser du sammenhengen mellom dette og de korresponderende metodene for differensiallikninger?