

Apoteose

Nå skal vi klinke til, og løse systemer av ordinære differensiallikninger numerisk. Dersom du får til dette, er det i prinsippet ingen envariable problemer du ikke kan gi deg i kast med.

La oss si at initialverdiproblemet ser slik ut:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) & x(0) &= x_0 \\ \dot{y} &= g(x, y) & y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Med dette notasjonsvalget blir Eulers eksplisitte metode for systemer lett å skrive opp:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n)\end{aligned}$$

Vi venter litt med Euler implisitt og trapesmetoden. La oss ta et eksempel. Lotka-Volterra-systemet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - y) \\ \dot{y} &= y(x - 1)\end{aligned}$$

modellerer størrelsen på to dyrepopulasjoner, der den ene driver med predasjon på den andre. Dette er en videreutvikling av den logistiske likningen du har sett i en tidligere økt.

- 1 Hvilken av de ukjente i Lotka-Volterra-systemet representerer predatorarten?
- 2 Lag et script som løser Lotka-Volterra med Eulers eksplisitte metode, og plot x og y mot t i samme plot.
- 3 Hvis du tror dette er bare noe tull vi gjør for gøy, kan du sammenlikne med plottene her:
<https://mc-stan.org/users/documentation/case-studies/lotka-volterra-predator-prey.html#data-lynx-and-hare-pelts-in-canada>

En av de mange fordelene med å kjenne til systemer av førsteordensdifferensiallikninger, er at det er ryddig. Vi trenger for eksempel ikke lage egne numeriske metoder for å løse andre ordens likninger som

$$\ddot{x} + \sin x = 0,$$

for det er bare å skrive om til system, og bruke metodene vi har til rådighet.

- 4 Likningen over er løsningen på fysikknotten i en tidligere økt, og er ikke mulig å løse analytisk. Skriv om til førsteordens system og løs numerisk med initialbetingelser $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.

En annen klassiker fra elektroteknikken er van der Pol's likning:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Denne ble oppdaget av Balthasar van der Pol i forbindelse med radorør, men modellerer også fint sprekker mellom kontinentalplater og nevronavfiring.

- 5 Løs van der Pol numerisk med $\mu = 2$, og plot x mot $\dot{x}$.

Dagens moro

Symplektisk Euler ser slik ut:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_{n+1}, y_n)\end{aligned}$$

Dette ser tilforlatelig ut, men er faktisk veldig artig.

- 6 Løs Lotka-Volterra med symplektisk Euler og sammenlikne med oppgave 2. En av metodene gir kvalitativt riktig resultat, og en av dem gir ikke. Ser du hvilken? (Det kan være du må kjøre ganske langt i tid før du ser noen forskjell mellom metodene.)

Dagens nøtt

Trapesmetoden er gitt ved

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + h \left(\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right) \\ y_{n+1} &= y_n + h \left(\frac{g(x_n, y_n) + g(x_{n+1}, y_{n+1})}{2} \right)\end{aligned}$$

- 7 Løs

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} z$$

med initialkrav

$$z(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

med både Eulers metode og trapesmetoden, og sammenlikne med den analytiske løsningen.

Dagens elektronøtter

Løs numerisk. Velg initialverdier og parametre for kretselementene selv. Dette er vel det som kan kalles rosinen i pølsen i TMA4101. (Tror disse kretsene kalles frekvensfordoblere, men jeg husker ikke helt. Spør Laurentius Lie.)

