Egenvektorer

I forrige uke lærte vi å gange vektorer inn i matriser. Du kan egentlig tenke på en matrise som en funksjon som tar inn en vektor og gir ut en annen, for eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

For de fleste vektorer du ganger inn, får du noe random greier ut. Men nå skal vi se på noen vektorer som oppfører seg litt spesielt.

$\boxed{1}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathrm{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Beregn $A\mathrm{v}$ og $A\mathrm{w}$. Ser du noe gøy?

Vektorene i forrige oppgave var såkalte egenvektorer til A. En egenvektor til A er en vektor v som tilfredsstiller likningen

$$A\mathrm{v} = \lambda \mathrm{v}$$

der λ er en skalar som kalles egenverdien til A tilhørende v.

$\boxed{2}$ Forklar at dersom du ønsker å beregne egenverdiene til A, bør du løse likningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$\boxed{3}$ Finn alle egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ Forklar at dersom du ønsker å finne egenvektorene til A, bør du løse likningen

$$(A - \lambda I)\mathrm{x} = 0$$

der λ er egenverdiene til A.

$\boxed{5}$ Finn egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ Finn egenverdiene og egenvektorene til

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$ La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn egenverdiene og egenvektorene, sett egenvektorene opp som kolonner i en matrise P, og beregn $P^{-1}AP$. Ser du noe gøy?

Dagens moro

Her er en matrise som er litt dårligere enn andre matriser. Derfor sier vi at den er defekt.

$\boxed{8}$ Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dagens nøtt

Vi har sett at matrise-vektorproduktet en lineæravbildning. Det er fullt mulig å definere lineæravbildninger som ikke er basert på matriser, for eksempel derivasjonsoperatoren

$$F(y) = \dot{y}$$

der $y = y(t)$ er en funksjon (slik du har lært masse om på videregående skole) er en lineæravbildning. (Prikken over y er Newtons notasjon for derivert. Den har du kanskje ikke sett før.)

$\boxed{9}$ Finn egenfunksjonene til derivasjonsoperatoren.