Å løse en likning I

Nå skal vi ta en liten pause fra lineæralgebraen, og dykke dypere i envariabel kalkulus. Dette er det du brukte mest tid på i skolen.

$\boxed{1}$ Prøv å løse likningen

$$x = \cos x$$

med penn og papir.

Hvis du fikk det til, anbefaler jeg at du publiserer resultatet ditt. Ingen har fått det til før. Løsningen til likningen eksisterer (den kalles Dottietallet og er oppkalt etter en professor i fransk: `https://www.maa.org/sites/default/files/Kaplan2007-131105.pdf`), men den er ikke så lett å finne uten en kalkulator. (Ihverftall for et moderne menneske som ikke kan regne for hånd.)

$\boxed{2}$ Les den første siden i artikkelen over, og gjenta professor Dotties eksperiment i Python.

Professor Dottie gjenoppdaget noe som kalles fikspunktiterasjonen. Hun oppdaget kort og godt at iterasjonen

$$x_{n+1} = \cos x_n$$

sakte men sikkert konvergerer mot den korrekte løsningen $r \approx 0.739085$. Dette ser sikkert rart ut, men i neste uke skal vi se på hvorfor dette noen ganger virker, og når det eventuelt virker.

$\boxed{3}$ Likningen

$$x \ln x = 1$$

kan skrives om til formen

$$x = g(x)$$

på minst to forskjellige måter. Finn de to åpenbare, og prøv fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

på begge.

Forresten, hva er en funksjon? Dette er viktig. En funksjon f (eller g eller h eller hva som helst) er en regel som tar inn et tall og gir ut et annet. Vi skriver

$$f : A \to B$$

for å uttrykke at f tar inn et tall fra mengden A og gir ut et tall i mengden B. Du kan i utgangspunktet velge definisjonsmengden A fritt, så lenge du husker på å ikke inkludere tall som er forbudt (ikke noe deling på null osv!).

$\boxed{4}$ Finn den største mulige reelle definisjonsmengden til

$$f(x) = \ln x.$$

(Har du glemt den naturlige logaritmefunksjonen, bør du sjekke den opp. Den er viktig.)

Ok, så nå vet vi hva en funksjon er. Fra skolen er du vant til at selve regelen til funksjonen er spesifisert ved et funksjonsuttrykk med noen x-er eller noe, men det ligger ingen nødvendighet i dette. Dersom $A = \mathbb{N}$ (de naturlige tallene: `https://en.wikipedia.org/wiki/Natural_number`), kalles funksjonen en følge. Fikspunktiterasjonen produserer en følge. Denne følgen er definert ikke ved et vanlig funksjonsuttrykk, men derimot ved en rekursjon:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

$\boxed{6}$ Likningen

$$x^2 = \cos x$$

har to løsninger. Prøv å finne dem med fikspunktiterasjonen.

Siden fikspunktiterasjonen produserer en følge som i noen tilfeller konvergerer mot løsningen til likningen vi interesserer oss for, vil vi aldri finne løsningen (denne kalles forresten en rot) helt nøyaktig, men vi kan bestemme oss for å slutte når vi synes vi har nok desimaler. Et vanlig triks for å vite når man skal gi seg, er å se på når det ikke lengre er endring i desimalene fra iterasjon til iterasjon. Da er det klart at datamaskinen har gjort så godt den kunne, og det er ikke vits i å holde på lengre.

$\boxed{7}$ I forrige oppgave var den ene roten

$$r = 0.8241323123025225.$$

Hvor mange iterasjoner må til før det ikke er endring i desimalene?

Oppgaven over hinter om noe som kalles en cauchyfølge. Her kommer definisjonen.

Cauchyfølger

Vi sier at en følge $\{x_n\}$ er en cauchyfølge dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes en N slik at $m, n > N$ impliserer

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Tenk på ϵ (gresk bokstav, uttales epsilon) som et bitte lite tall. Definisjonen over sier at dersom du går langt nok ut i følgen (altså at m og n er store), er det etter dette punktet ingen endring i desimalene til venstre for en eller annen desimal (definert av ϵ).

Dagens moro

På Gløshaugen opererer vi stort sett med seks tallmengder:

Viktige tallmengder

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$$

Den innerste kalles naturlige tall, og er de som du bruker når du teller. Denne er meget gammel, og noen dyr kan antagelig telle (`https://www.uib.no/ka/50862/levde-med-ørn`). De første sikre arkeologiske tegn på menneskelig bruk av tall, er omtrent 30000 år gamle, mens det første ordentlige tallsystemet er babylonsk og oppsto omtrent 3400 BC.

Den utenfor kalles hele tall. Disse er de naturlige tallene samt null og negative tall. De negative tallene ble oppfunnet av en kineser omtrent 200 AD, selv om vi i vesten liker å si at de ble oppfunnet av Rene Descartes på 1600-tallet. Null er en litt eldre oppfinnelse, her snakker vi Egypt nesten to tusen år Kristus. Den egyptiske hieroglyfen for null, nfr, betyr noe sånt som vakker. Mayaindianerne oppdaget også null, men det var mye senere, omtrent år null.

De hele tallene er inneholdt i de rasjonale tallene, altså alle brøker. De positive rasjonale tallene er antageligvis eldre enn de negative hele tallene, men det er ikke så godt å vite. Det er sannsynlig at noen mennesker hadde en ide om hvordan man skulle dele tre epler likt på fem personer lenge før skriftspråk oppsto, men de første sikre skriftlige kilder er fra noen hundre år før Kristus. Euklids Elementer fra omtrent 300 BC er kanskje den mest kjente kilden.

Slett ikke alle tall kan skrives som en brøk. Dette har vært kjent i India siden omtrent 700 BC, og det sies at Hippasos ble kastet på havet av Pytagoras da han oppdaget at $\sqrt{2}$ ikke kunne skrives som en brøk. (Dette var pinlig for Pytagoras, som hele livet hadde påstått at alle tall kunne skrives som en brøk.) Tall som ikke kan skrives som brøk, kalles irrasjonale tall, og dersom man tar med disse i tillegg til de rasjonale, får man de reelle tall. En matematisk stringent definisjon av reelle tall ble ikke oppfunnet før omtrent 1870 av Richard Dedekind. Denne er ganske vanskelig, og kan gjøres på flere måter. En av de klassiske måtene å gjøre det på er faktisk basert på cauchyfølger.

$\boxed{8}$ Vis at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk. (Ikke trivielt, men noen skjønte det som sagt allerede 700 BC.)

Likningen

$$x^2 - 2 = 0$$

har ingen rasjonal løsning. Derfor har vi funnet opp noe vi bare kaller $\sqrt{2}$, som vi tenker på som diagonalen i et kvadrat med sidekant 1. Likeledes har ikke likningen

$$x^2 + 1 = 0$$

noen reell løsning, så vi kan like gjerne finne opp et tall til. Det kalles den imaginære enheten, skrives i, og kjennetegnes ved at

$$i^2 = -1.$$

Et tall på formen

$$z = a + bi$$

der a og b er relle tall, kalles et komplekst tall. Den første som begynte å fikle med dette, var Girolamo Cardano i 1545, i forbindelse med polynomlikninger. Moderne elektroteknikk er utenkelig uten komplekse tall.

$\boxed{9}$ Løs likningen

$$x^2 + 2x + 2 = 0.$$

De komplekse tallene er en såkalt algebraisk lukket kropp, som betyr at alle polynomer kan faktoriseres i første ordens faktorer.

$\boxed{10}$ Faktoriser polynomet

$$p(x) = x^2 + 2x + 2.$$

W. D. Hamilton fant i 1843 opp kvaternionene, som er en slags utvidelse av de komplekse tallene, og den ytterste tallmengden i boksen over. De består i at man utvider med to nye imaginære enheter j og k, definert av relasjonene

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Hamilton fikk den sentrale aha-opplevelsen på tur over en steinbro midt i Dublin, og skrapte likningen umiddelbart inn i rekkverket på broen med en brevåpner han hadde i lommen. Inksripsjonen er dessverre vekk. Kvaternioner er godt egnet til å holde styr på et legemes orientering i rommet, så dersom du bytter til kyb og skal jobbe med satelitter, vil du før eller siden få bruk for disse. Da de landet på månen første gang, visste de ikke at dette var lurt: `https://medium.com/@vieyrasoftware/stepping-into-a-new-dimension-using-quaternions-to-see-the-invisible-478087c9ebbf`

Dagens nøtt

$\boxed{11}$ Vi vet jo at det kan være vanskelig å finne nullpunktene til et polyom, selv om algebraens fundamentalteorem garanterer at de finnes. Her kan fikspunktiterasjonen være til hjelp. Faktoriser polynomet

$$x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0.$$

Tallsvar

3: 1.7632228343518968

4: $x > 0$

7: ser ut som et sted mellom 40 og 50

10: $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$