

Rekker III

Nå skal vi begynne å putte inn x -er i rekkene. Da får vi noe som kalles potensrekke:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Man kan også sentrere rekken i et annet punkt $x = c$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - c)^n$$

Lesestoff

- 3 herfra:
<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/TMA4101-analyse.pdf>
- Kreyszig 15.2-15.4
- Adams 9.5-9.6

1 Den aller viktigste potensrekken er

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Vis at denne konvergerer for alle x . (Enklest med forholdstesten.)

To andre viktige rekker er

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

2 Vis at rekkene over konvergerer for alle x .

Det finnes også rekker for andre funksjoner. Vi kjenner jo til

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

som konvergerer for $|x| < 1$. Det er stort sett (med noen unntak) lov å herje med rekker som man vil.

- 3 Finn en rekkeutvikling for

$$\frac{1}{1+x}$$

(Hint: substitusjon.)

- 4 Hva med

$$\frac{1}{1+x^2}?$$

(Hint: også substitusjon.)

- 5 Enn

$$\arctan x?$$

(Hint: integrer ledd for ledd.)

- 6 Eller

$$\ln(1-x)?$$

(Hint: integrer ledd for ledd.)

- 6

$$\frac{1}{(1-x)^2}?$$

(Hint: multipliser to rekker eller deriver ledd for ledd.)

Å vise at alt dette er lov, er ganske vanskelig, og litt for hardt for oss. Men det går an å finne konvergensområdene (altså de x slik at rekken er konvergent) ved å bruke konvergenstestene.

- 7 Gjør dette.

Dagens moro

- 8 Finn konvergensområde og sum for rekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n.$$

Er summen en kontinuerlig funksjon?

- 9 Sinc-funksjonen

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

er veldig viktig i signalbehandling. Finn en potensrekke som passer. Hva tror du $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ er?

Dagens nøtt

- 10 Vis at dersom $\{a_n\}$ er en begrenset følge, så konvergerer

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

absolutt for alle $x \in (-1, 1)$.