

Funksjoner på $\mathbb{R}$

Lesestoff

- 4 herfra:
<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/TMA4101-analyse.pdf>
- Adams 1-2

Den viktigste funksjonen er antagelig

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Nå er det viktig å forstå at en funksjon $f : A \rightarrow B$ er en regel som spesifiserer ett og bare ett element i verdimengden B til hvert element i A . Vanligvis er det mulig å skrive opp selve regelen på mange forskjellige måter, og eksemplet over er bare ett av mange. Her er et av de sykeste. Funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(m! \pi x)^{2n}$$

kan faktisk også skrives

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Det er vanlig å klassifisere funksjoner i et regularitetshierarki. Dette blir en litt teknisk ert-ykt (A-stoff på eksamen), men vi må nesten gjennom det. Du har sett det meste på videregående skole, men vi skal gå et knepp lenger.

En funksjon sies å ha grenseverdien L i x_0 dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at implikasjonen

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

holder. Vi skriver i så fall

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

1 Vis eller forklar at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

ikke eksisterer. (Sikkert lurt å plote den.)

En funksjon er kontinuert i et punkt dersom du kan tegne grafen gjennom punktet uten å løfte blyanten fra rutepapiret. For å gjøre dette presist, bruker vi grenseverdigbegrepet.

En funksjon sies å være kontinuerlig i x_0 dersom:

- $f(x_0)$ er definert
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ eksisterer
- $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Vi sier f er kontinuerlig på (a, b) dersom f er kontinuerlig for alle $x \in (a, b)$.

2 Vis eller forklar at funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ikke er kontinuerlig.

3 Vis eller forklar at funksjonen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig. (Nok en gang lurt å plote.)

Mengden av alle kontinuerlige funksjoner på (a, b) skriver vi $\mathcal{C}(a, b)$. Nå kan vi med noen få symboler oppsummere de foregående eksemplene:

$$g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \qquad f \notin \mathcal{C}(\mathbb{R})$$

Vi bruker grenseverdier til å definere stigningstall.

Vi definerer den deriverte til f i punktet x som

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dersom grenseverdien eksisterer. Vi sier i så fall at f er deriverbar i x .

4 Vis at funksjonen g over ikke er deriverbar.

5 Vis at funksjonen

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar.

Det er ikke så vanskelig å se at dersom en funksjon er deriverbar i x , er den også kontinuerlig i x . Det motsatte er ikke sant.

6 Vis at den deriverte til h over ikke er en kontinuerlig funksjon.
(Hint: deriver h og se hva som skjer når $x \rightarrow 0$.)

Dersom den deriverte til en funksjon f er kontinuerlig, sier vi at f er kontinuerlig deriverbar. Mengden av alle kontinuerlig deriverbare funksjoner på (a, b) skriver vi $\mathcal{C}^1(a, b)$.

7 Vis at funksjonen

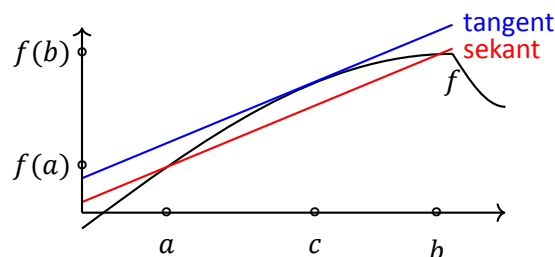
$$l(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er kontinuerlig deriverbar.

Dette var litt om deriverbarhet. Her er en artig fakta du lærte på skolen. Dersom f er deriverbar og du slår en sekant, må det mellom punktene der du slo sekanten finnes en tangent som er parallell med sekanten din.

Dersom f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) , finnes $c \in (a, b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Virker rimelig dette her. Men nå skal vi gå litt lenger. Dersom den n -te deriverte til f er kontinuerlig, sier vi at f er n ganger kontinuerlig deriverbar, og mengden av disse funksjonene skriver vi $\mathcal{C}^n(a, b)$. For slike funksjoner gjelder en generalisering av sekantsetningen som kalles Taylors teorem.

La f være en $n + 1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et åpent intervall som inneholder a og x . Det finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

8 Skriv ned Taylors teorem for $n = 0$.

Polynomet

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n$$

kalles det n -te ordens taylorpolynomet til f om a . For å gjøre den neste oppgaven er det lurt å lære seg å plote i Python. Se her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h//python/krasjkurs-python.pdf>

9 Plott sin x og taylorpolynomer av forskjellige grad i samme plot. Eksperimenter med høy grad på polynomet. Du kan evt se her:

https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series.

Dersom $n = \infty$, sier vi at f er glatt. De fleste funksjoner du har jobbet med i skolen, var glatte unntatt i noen få punkter. Du tenker kanskje at nå har vi makset helt opp regularitetsskalaen (regularitet= hvor mange deriverte er kontinuerlige?), men det finnes et knepp til.

Dersom f er glatt og

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \dots$$

sier vi at f er analytisk.

Rekken

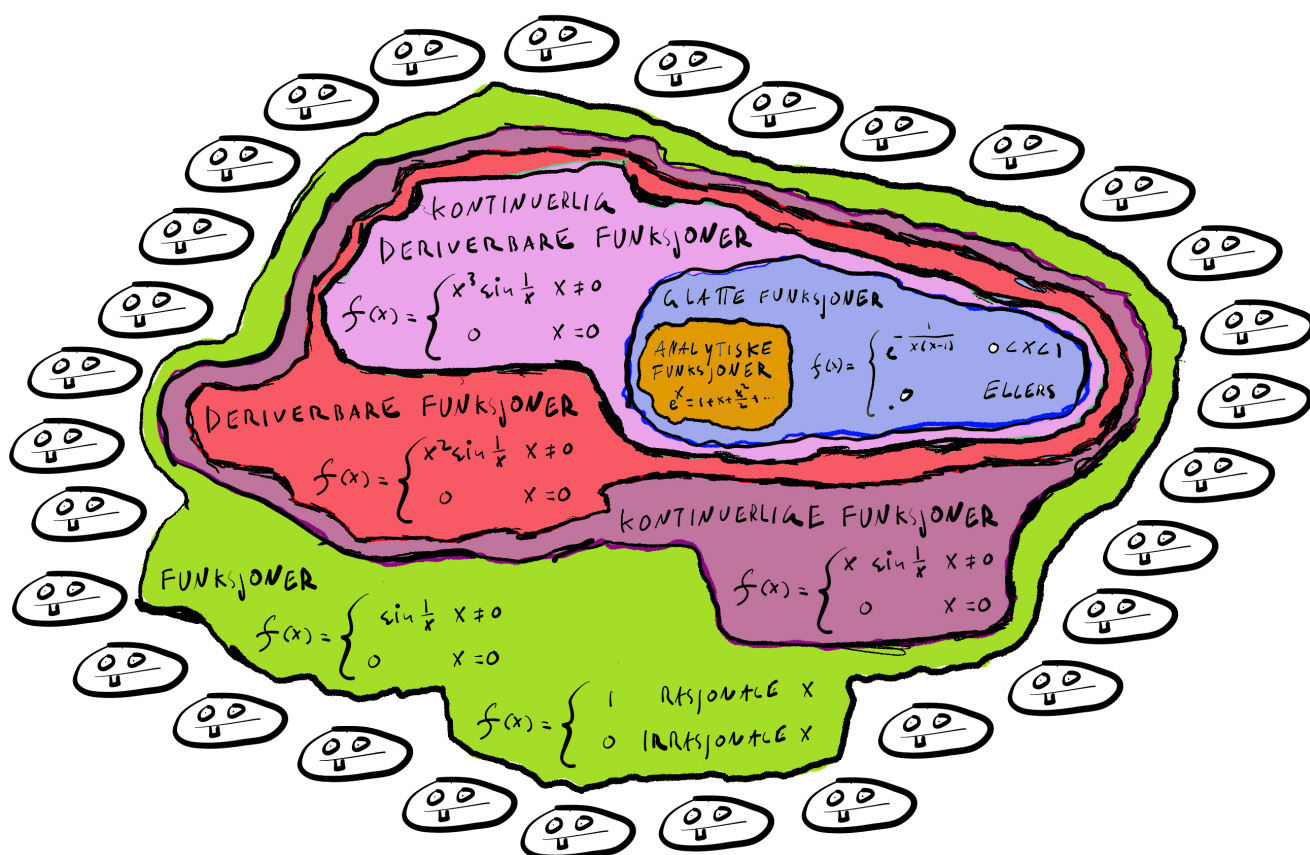
$$f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

kalles Taylorrekken til f .

10 Eksponensialfunksjonen e^x er analytisk. Finn taylorrekken om $x = 0$.

11 Gjenta for $\sin x$ og $\cos x$.

Her er til slutt en oversikt:



Dagens nøtt

12 Funksjonen

$$m(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x+1)(x-1)}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

er glatt, men ikke analytisk. Forklar.

Fasit

1-7: Disse står i kap. 4 her: <https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021b/notater/TMA4101-analysis.pdf>

12: Siden e^{-t^2} kverker så og si alt annet når $t \rightarrow \infty$ eller $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{d^n}{dx^n} = 0$ for alle n . Slår du tallrekken i $x = 2$, får du jo bare 0.

10-11: Du får de samme rekken som vi har skrevet opp

8: Dette blir sekantsetningen i