

Integralet I

Etter fullendt R2 sitter man gjerne igjen med følgende ide:

INTEGRASJON = ANTIDERIVASJON

DET ER FEIL.

For å hamre dette gjennom, skal vi se på en funksjon som ikke er så lett å antiderivere.

1 Arealet under grafen til $f(x) = e^{-x^2}$ og mellom $x = 0$ og $x = 1$ skrives

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0.7468241328...$$

Finn dette arealet til ti desimalers presisjon på en eller annen måte uten wolframalpha. (Dette kan du med det du har lært til nå gjøre på minst to helt forskjellige måter.)

I mange situasjoner er det enten umulig eller urealistisk å antiderivere for å finne integralet. Funksjonen e^{-x^2} har ingen antiderivert som lar seg skrive ned på en pen måte, og andre funksjoner har så kompliserte antideriverte at det ikke er vits i å prøve en gang:

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(\cos(x))}{\sin(2x)} dx = & -\left(\log(\cos(x)) \left(2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2} \left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2} \left((1+i) - (1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) + \right. \right. \\ & 2 \operatorname{Li}_2\left(-\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(-i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\ & 2 \operatorname{Li}_2\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right)\right) + 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2} \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) - \\ & 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2} \left((1-i)\tan\left(\frac{x}{2}\right) + (1+i)\right)\right) - 2 \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2} \left((1+i)\tan\left(\frac{x}{2}\right) + (1-i)\right)\right) + \\ & \log^2\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log^2\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \\ & \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) + \\ & 4 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) \log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \log(4) \log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\ & 2 \log\left(1 - i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 2 \log\left(1 + i \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\ & 2 \log\left(\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) - \\ & 2 \log\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right)\right) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) - \\ & 2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) - \\ & 2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right)\right) - \\ & \log(4) \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \log\left(\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right) \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \\ & 2 \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\ & \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) - i\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \\ & \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + i\right) \log\left(\cos(x) \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \Big/ \\ & \left(4 \left(\log\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right) + \log\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) \right) \right) + \text{constant} \end{aligned}$$

Men det viktigste å skjønne når vi skal forstå integrasjon, er hva en riemannsum er. Disse brukes egentlig til å definere integralet, men kan også brukes til å finne en tilnærming til arealet under grafen.

2 Les deg opp på hva en riemannsum er, og finn

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

til ti desimalers presisjon ved hjelp av riemannsummer. (Hvis du brukte riemannsummer i oppgave 1, kan du selvfølgelig bare gå videre.)

Nå skal vi så smått begynne på integralet. Dette er litt teoretisk, men vi må gjennom det, for ellers blir det umulig å skjønne slike ting som

$$\iint F \cdot NdS$$

om et års tid. Her kommer definisjonen. Se kap. 5 her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/TMA4101-analyse.pdf>

eller kap. 5 i Adams for mer utfyllende informasjon.

En partisjon P av intervallet $[a, b]$, er en endelig punktmengde som deler intervallet i mindre biter. Delingspunktene kaller vi x_i , der $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. La f være en begrenset funksjon, og P en partisjon av intervallet $[a, b]$. La

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{og} \quad M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

En øvre og nedre riemannsum er henholdsvis:

$$U(P) = \sum_{n=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i \quad \text{og} \quad L(P) = \sum_{n=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i$$

Dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a, b]$ slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at f er integrerbar.

Integrerbarhet betyr egentlig bare at arealet under grafen er veldefinert. Hvorvidt funksjonen er lett eller vanskelig å antiderivere, er irrelevant. Funksjonen gitt ved $f(x) = e^{-x^2}$ er integrerbar selv om den ikke har noen antiderivert som er lett å skrive opp med penn og papir. Et eksempel på en funksjon som faktisk ikke er integrerbar, er

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{rasjonale } x \\ 0 & \text{irrasjonale } x \end{cases}$$

Nå skal vi studere en annen funksjon som ikke er lett å antiderivere, men som er veldig viktig i elektroteknikk, nemlig sinc : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, som er gitt ved

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

3 Ta

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

som definisjonen på $\sin x$ og finn

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

4 Forklar at sinc-funksjonen er kontinuert.

5 Finn en tilnærming til

$$\int_0^\pi \text{sinc}(x) dx \approx 1.85193705196$$

ved å bruke riemannsummer.

En metode som er enda bedre, kalles trapesregelen, se eks 5.18 her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/notater/TMA4101-analyse.pdf>

6 Finn en tilnærming til

$$\int_0^\pi \text{sinc}(x) dx$$

ved å bruke trapesregelen og sammenlikne med forrige oppgave.

7 Her er en alternativ teknikk. Bruk rekken til $\sin x$ til å skrive

$$\int_0^\pi \text{sinc}(x) dx$$

som en alternerende rekke, og finn en tilnærming til integralet ved hjelp av denne.

Dagens moro

Det er som sagt mulig å ta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

og

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

og

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

som definisjonene på e^x , $\cos x$ og $\sin x$. Man må da vise at disse rekkene har nøyaktig de egenskapene vi er vant med, for eksempel at

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

og at

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

og så videre. Det finnes noen fordeler med denne strategien. For eksempel blir det trivielt å se at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = 1$$

Her kommer en annen fordel.

8 Gitt at

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

vis eller forklar at

$$i \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

9 En liknende relasjon kan utledes for $\cos x$.

10 Prøv å legge sammen rekkene for $\cos x$ og $\sin x$. Ser du noe gøy?

Hvis du ikke fikk det til oppgavene, men er nysgjerrig allikevel, finner du alt her:

<https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4106/2021v/notater/01-komplekse-tall.pdf>

Dagens geometriske nøtt

11 Vis geometrisk at

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Dette er nok noe vanskeligere enn med rekker. Du finner argumentet i eksempel 4.13 i notatene eller i kap 2.5 i Adams eller fra 1:34:40 i geometriforelesningen her

<https://wiki.math.ntnu.no/oppfrisk/2020/forelesninger>.

Dagens analytiske nøtt

Vi sier at at en rekke er absolutt konvergent dersom $\sum |a_n|$ er konvergent. Forholdstesten viser at rekken til e^x er absolutt konvergent. Blant annet betyr dette at vi kan stokke om på rekkefølgen av leddene uten at det har noe å si for hva rekken konvergerer til. Følgende oppgave er nok i hardeste laget for de fleste, men artig allikevel.

12 Ta

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

som definisjonen på e^x og vis at

$$e^{x+y} = e^x e^y.$$

(Hint: prøv å se hvordan leddet $x^n y^m$ ser ut på begge sider av likningen. Du er nødt til å kunne en del om binomialkoeffisienter:

https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_coefficient
for å få det til.)