

Integralet II

Viggo Brun skal ha sagt:

Derivasjon er et håndverk, integrasjon er en kunst!

Det han mente å si, var nok at derivasjon er ganske lett (det er bare å bruke noen regneregler), mens antiderivasjon kan være ganske vanskelig. Et tilforlatelig funksjonsuttrykk kan være enten lett eller vanskelig eller fullstendig håpløst å antiderivere, og det er ofte umulig å avgjøre hvilken av disse som er tilfellet før man har prøvd å antiderivere. Kanskje er det til og med lett, men man kan ikke akkurat det trikket som må brukes, og derfor går det ikke.

Man kan bruke et liv på å trene på antiderivasjon. Hvis jeg vil lage en integrasjonsoppgave på eksamen som ingen får til, er det bare å gi

$$\int \frac{\log \cos x}{\sin 2x} dx$$

og vips så er det ingen som får A. Det kommer jeg selvfølgelig ikke til å gjøre. Men vi må ha litt antiderivasjon, selv om dette kanskje er det minst viktige aspektet ved integrasjon. Nå tar vi noen oppgaver. Først noen arealklassikere som Arkimedes fant ut av allerede 250 BC.

1 Finn arealet avgrenset av $y = x^2$, $y = 0$ og $x = 1$.

2 Finn arealet avgrenset av $y = x^2$, $y = 1$ og $x = 0$.

En annen klassiker på eksamen er de der man bare må skrive om integranden litt.

3 Regn ut

$$\int_0^1 \sqrt{x^2 + 4x + 4} dx$$

(Hint: faktoreriser polynomet.)

4 Regn ut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos x} dx$$

Hint: $\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1$.

5 Funksjonene $y = \sin^2(x)$ og $y = 1$ avgrenser et uendelig antall noe avrundede pizzastykker. Finn arealet av et av disse. Hint: $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

Et annet klassisk triks, er kjerneregelen. Den er egentlig bare kjerneregelen for derivasjon i retur. Siden

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2} = -2xe^{-x^2},$$

er det veldig lett å beregne

$$\int -2xe^{-x^2} dx = e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden ser omtrent riktig ut i forhold til dette systemet, men har feil konstant, er det bare å gange og dele og herje litt:

$$\int 3xe^{-x^2} dx = 3 \int xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

Hvis integranden blir komplisert, kan det være lurt å utføre dette trikset som en variabelsubstitusjon, men dette blir fort en uforståelig oppskrift (det var det ihvertfall for meg da jeg gikk på skolen) om man ikke skjønner at det er kjerneregelen som ligger i bønn for alt:

$$\int 3xe^{-x^2} dx = -\frac{3}{2} \int e^u du = -\frac{3}{2}e^u + C = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + C$$

6 Regn ut

$$\int \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} dx.$$

7 Finn arealet begrenset av $y = x/(x^2 + 16)$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 2$.

8 Beregn

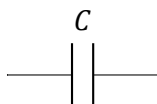
$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} dx.$$

Du finner LF til de fem siste her:

https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/2017h/anbefalt_38_lf.pdf

Dagens moro

En kondensator er noe sånt som to plater som står inntil hverandre i en krets. Symbolet ser slik ut:



Kretsen kan fylle på elektroner på den ene platen og tappe dem ut fra den andre platen, slik at det oppstår en spenning mellom platene. Energi blir ladet opp, og denne kan bli sluppet løs igjen senere; det kommer an på kretsen. Vi skal se på det.

Spenningen over kondensatoren er proporsjonal med hvor mye ladning som er kjørt inn i den:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(s) ds$$

Proporsjonalitetskonstanten C måles i coulomb per volt, og avhenger av kondensatoren.

9 Ved tiden $t = 0$ er kondensatoren helt utladet, og spenningen over den er null. Finn spenningen over kondensatoren som funksjon av t når $I(t) = \sin \omega t$. (Konstanten ω kalles gjerne frekvensen, og kan være hva som helst. Det blir mye $\sin \omega t$ de neste par årene.)



Dagens mattenøtt

Du husker kanskje formelen for delvis integrasjon:

$$\int f g' = f g - \int f' g$$

10 Finn

$$\int e^x \cos x \, dx$$

med delvis integrasjon.

Hvis du skjønte forrige økts nøtt, har du kanskje fått med deg at

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Denne kan forenkle mange ting, for eksempel oppgaven over.

11 Finn det samme integralet som i oppgaven over ved å bruke formelen for $\cos x$.

Dagens elektronøtt

En spole er en strømlledning som er lagt i spiral. Den har følgende kretssymbol:



Spolen fungerer sånn at når strømmen gjennom spolen endres, oppstår et magnetfelt som skaper en spenning som prøver å motvirke endringen i strømmen. Elementloven er:

$$v(t) = L \frac{di}{dt}$$

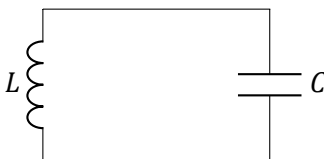
Dette er mer komplisert elementlov å forstå, og følger av Faradays lov

$$\oint_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_D \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

som er en av Maxwells fire berømte likninger. Vi må vente til tredje semester med å se på disse, for det trengs flervariabel kalkulus (integrasjon og derivasjon i n dimensjoner) for å i det hele tatt skjønne hva likningene sier.

Men man trenger ikke Maxwell for å skjønne hvordan spolen oppfører seg i en krets. Man må bare huske noe greier man lærte på videregående skole.

12 Finn strømmen i kretsen.



Fasit

$$1: \frac{3}{1}$$

$$2: \frac{3}{2}$$

$$3: \frac{4}{21}$$

$$6: v(t) = \frac{\omega}{1 - \cos \omega t}$$

$$10: \frac{2}{e^x} (\cos x + \sin x) + C$$

12: Bruk KVL og deriver hele likningen. Da får du $t''(t) + \frac{1}{LC}t(t) = 0$. Denne løste du på skolen.