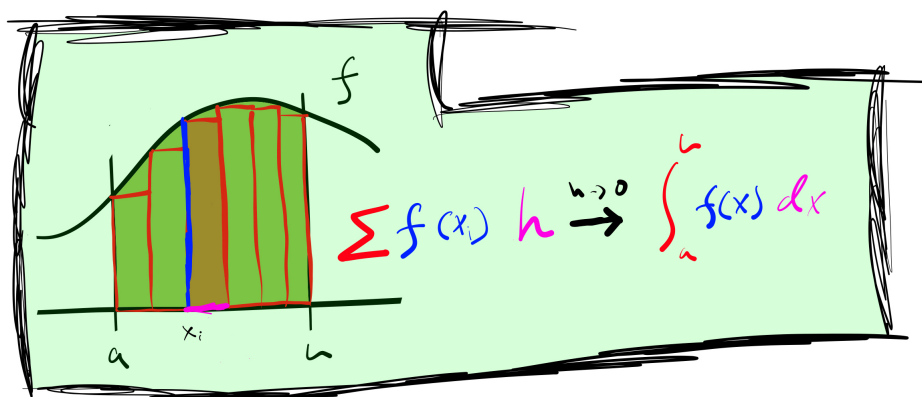


Integralet III

Ketsjup kan brukes til alt. All mat blir bedre med ketsjup. Slik er det også med integralet.

Integralet kan brukes til alt.

Når man lærer om integralet første gang, er det hensiktsmessig å fokusere på areal, for dette er ikke verre enn at Arkimedes klarte å beregne kompliserte areal for over to tusen år siden. Man trenger bare barneskolegeometri (arealet av et rektangel) og en litt komplisert grenseverdi-prosess, og vips så er man i mål. I figuren under er alt illustrert med fargekoder:



Men integralets styrke består i at arealt til de små rektanglene i histogrammet ikke trenger å representere areal. For eksempel kan h være et tidsintervall på t -aksen, og $f(t)$ angi strømstyrke som funksjon av tiden. I så fall blir $f(t)h$ litt ladning, og

$$\sum f(t)h \rightarrow \int_a^b f(t) dt$$

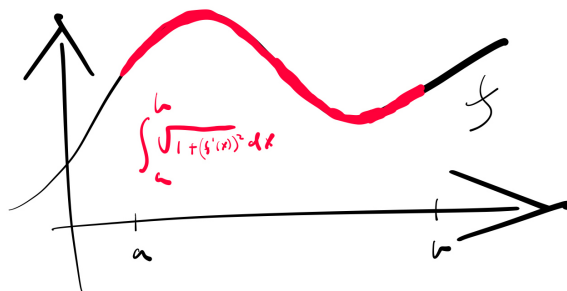
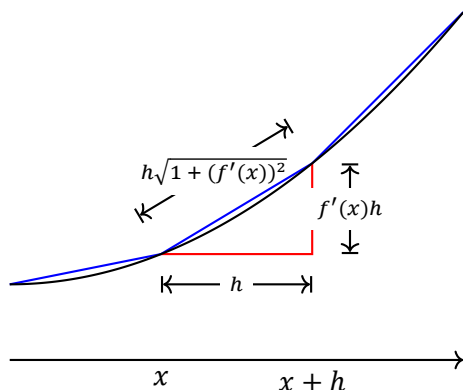
blir total opplagret ladning på en kondensator eller noe slikt mellom tidspunktene $t = a$ og $t = b$.

- 1 Anta at kondensatoren er utladet ved $t = 0$, og at strømkilden er gitt ved $I(t) = \sin t$. Finn ladningen på kondensatoren ved tiden $t = \pi$.



Men det stopper ikke der. Hvis du tar en titt på figuren under, vil du kanskje se at lengden av grafen til f fra $(a, f(a))$ til $(b, f(b))$ er

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$



- 2 Finn buelengden til $y = x^{3/2}$ fra $x = 0$ til $x = 1$.

Likningen for en sirkel

$$x^2 + y^2 = r^2$$

husker du forhåpentligvis fra skolen. Vi antar selvfølgelig at $r > 0$, og derfor kan likningen også skrives

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

En generalisering av denne er likningen for en ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Punktene som passer i denne likningen ligger på en ellipse sentrert i origo og med halvaksler a og b .

- 3 Finn omkretsen av en ellipse med halvaksler 1 og 2. (Begynn med å finne en funksjon $y = f(x)$ som beskriver øvre halvdel av ellipsen. Integralet du ender opp med kan ikke beregnes analytisk, så du må nok til med riemannsummer eller taylorrekker.)
- 4 Finn lengden av en periode av sinuskurven. (Dette integralet kan heller ikke beregnes analytisk.)

Dagens moro

Du husker forhåpentligvis skalarproduktet mellom vektorer:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$$

Det heter skalarprodukt fordi du får ut et tall som forteller noe interessant om forholdet mellom vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$. Skalarproduktets viktigste egenskaper er

Det er symmetrisk:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v},$$

Det er lineært i andre argument (her er a og b er tall):

$$\mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = a\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + b\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

Og positivt definit:

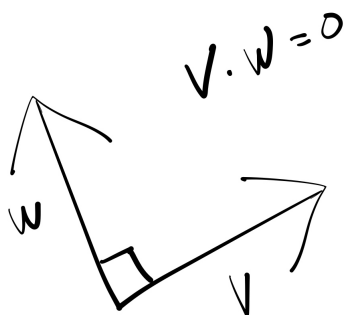
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad \text{dersom} \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Det går helt fint å sette opp disse egenskapene som aksiomer, og så gå på leting etter andre ting som oppfører seg likt. Den kanskje viktigste av disse tingene er produktet

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Vi sier at f og g er ortogonale dersom $(f, g) = 0$.

Du husker kanskje følgende figur:



Skal du få til oppgavene under, er det antagelig lurt å huske på at $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ og at $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. Du får det også til med de trigonometriske formlene

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \cos x \sin y \pm \sin x \cos y$$

men dette er nesten alltid litt mer knotete.

- 5 Hvis at $\cos mx$ og $\cos nx$ er ortogonale på $[-\pi, \pi]$ dersom $n \neq m$.
- 6 Hvis at $\cos mx$ og $\cos nx$ er ortogonale på $[-\pi, \pi]$ dersom $n \neq m$.
- 7 Hvis at $\cos mx$ og $\sin nx$ er ortogonale på $[-\pi, \pi]$ for alle n og m .

Dagens mattenøtt

På skolen lærte du å parametrisere rette linjer.

- 8 Finn parameterfremstillingen for den rette linjen i $\mathbb{R}^2$ som går gjennom punktene $x = (1, 2)$ og $y = (3, 4)$.

Vi skal etterhvert begynne å smake på parametriserte kurver, eller funksjoner fra $\mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$ om du vil. En slik funksjon tegner en kurve i planet som har lov til å gå i alle mulige retninger, krysse seg selv, osv. Den er mye friere i oppførsel enn grafen til $y = f(x)$, og skrives

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Du fant en slik i forrige oppgave. Et annet eksempel er parametrisering for en sirkel med radius r

$$x(\theta) = \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix}$$

der $0 \leq t \leq \theta$.

- 9 Finn en parametrisering for en ellipse med halvakser a og b .
- 10 Hvordan tror du at man finner tangentvektoren til en funksjon $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$? Finn tangentvektoren til ellipsen.
- 11 Hvordan tror du at man finner buelengden til en slik funksjon? Finn omkretsen til ellipsen.