

Integralet IV

Nå skal vi se på en litt kjedelig teknikk for å integrere rasjonale funksjoner. Teknikken er dessverre veldig relevant for elsys. Hvordan skal vi gå frem om vi ønsker å integrere en funksjon på formen

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)}$$

der q og p er polynomer? Det er vanlig å anta at q har lavere grad enn p . Hvis det ikke er tilfelle, er det bare å bruke polynomdivisjon og skrive

$$f(x) = \frac{q(x)}{p(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{p(x)}$$

der s har lavere grad enn p . Polynomet r er jo trivielt å integrere. La oss begynne med noe enkelt.

1 Finn

$$\int \frac{1}{x-a} dx$$

der a er en konstant.

2 La oss se om du husker et triks fra et tidligere eksempel om en teleskoperende rekke. Finn

$$\int \frac{1}{x(x-1)} dx.$$

Hvis du fikk til forrige oppgave, husket du kanskje at

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

og de to leddene på høyre side er jo trivielle å integrere.

Men la oss nå se på hvordan vi skulle funnet ut av dette om vi ikke hadde gjort den oppgaven med den teleskoperende rekken. Vi måtte visst at det var mulig å skrive

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)}.$$

Dersom dette er korrekt måte å spalte på, vil det nå være mulig å beregne A og B . Har du bommet på formen, vil du få et likningssystem som ikke har løsning. For å finne A og B , ganger vi først opp med $x(x-1)$ på begge sider:

$$1 = A(x-1) + Bx$$

Siden to polynomer kun er like om de har de samme koeffisientene på hver orden av x , er denne likningen kun sann dersom

$$0 = A + B$$

og

$$1 = -A.$$

Dette gir selvfølgelig

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{x}$$

som forventet.

La oss nå generalisere denne prosedyren. Først må vi minne om et viktig teorem.

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

Den store fordelen med dette teoremet akkurat nå er at det blir veldig lett å huske hvordan delbrøksoppspalting fungerer. Faktoriser alltid telleren i lineære faktorer, sett opp delbrøksoppspaltingen, gang opp med nevner i den originale brøken, og sammenlikne orden for orden i x .

3 Finn

$$\int \frac{1}{x^2 - 4} dx.$$

Spalt repeterte røtter slik:

$$\frac{p(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

for eksempel

$$\frac{1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

4 Finn

$$\int \frac{1}{x^2(x-1)} dx.$$

5 Finn

$$\int \frac{1}{x^4 - 4x^2} dx$$

Dagens moro

Vi kan så vidt begynne å smake på hvorfor delbrøksoppspalting er relevant for elsys. En klassisk teknikk for å løse de lineære differensiallikninger på kalles laplacetransform. Laplacetransformen til en funksjon er definert ved

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Det er inntil videre veldig viktig å anta at $s > 0$. Følgende delvisintegrasjon forklarer hva dette kan brukes til:

$$\mathcal{L}(f') = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = s\mathcal{L}(f) - f(0)$$

Vi kan bruke denne relasjonen på f'' to ganger, og få

$$\mathcal{L}(f'') = s\mathcal{L}(f') - f'(0) = s(s\mathcal{L}(f) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$$

6 Finn laplacetransformen til e^{at} .

Siden integrasjon er en lineæravbildning, er også laplacetransform det (a og b er tall):

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$

Dette får du bruk for i neste oppgave.

7 I en tidligere økt endte du opp med differensiallikningen

$$y''(t) + y(t) = 0$$

Vi slenger på initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Bruk laplacetransform til å skrive om differensiallikningen til en algebraisk likning i s .

Hvis du gjorde alt riktig i forrige oppgave, bør du ha endt opp med likningen

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2 + 1},$$

og forhåpentligvis husker du fra videregående skole at løsningen på initialverdiproblemet i oppgaven er $y(t) = \cos t$.

8 Delbrøksoppspalt uttrykket for $\mathcal{L}(y)$ og se om du ser noe artig. Hvis du ikke ser det, kan du prøve å beregne laplacetransformen til $\cos t$. (Også her er det lurt å bruke at $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$).

Hvis du skal analysere en krets med kun spoler, kondensatorer, motstander og spenningskilder (dette kalles et lineært system) er dette standardfremgangsmåten, og ingeniører som er skikkelig drevne, trenger bare ta et raskt blick på nullpunktene til nevneren $s^2 + 1$ og så vet de alt de trenger om systemet.

Dagens nøtt

9 Finn

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

10 Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$