

Ting du bør kunne skrive ned uten å konsentrere deg så veldig hardt

Det er ingen hjelpemidler på eksamen i TMA4101, så derfor er man pent nødt til å huske en del ting. Det er litt arbeid, men det å prøve å huske noe er for de fleste en grei test på forståelse. Det er utrolig mye lettere å huske noe man har forstått enn noe man ikke har forstått.

Om man pugger uten å prøve å forstå, er man på villspor.

For hver av de grå boksene i denne filen bør du klarer å lage omtrent en A4-side; fyll siden på din egen måte med teoremer, eksempler, figurer og logiske implikasjonsrekker. Let etter sammenhenger som gjør ting lett å huske.

Bruk penn og papir, ikke tablet eller datamaskin, for da husker du antagelig mye bedre:

<https://neurosciencenews.com/hand-writing-brain-activity-18069/>

Du er flink nok, ikke bry deg om hva slags karakter du får på eksamen. Matematikk skal være kjekt. Husk derfor å finne ditt happyplace når du skal tenke på matematikk. Mitt er under et furutre.



Lineæralgebra

Lineæravbildning

Dersom x og y er vektorer og a og b tall, og

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$$

sier vi at f er en lineæravbildning. Matriseproduktet, derivasjonsoperatoren og det bestemte integralet er alle lineæravbildninger. Dette har du allerede brukt en del, antagelig uten å tenke så mye over det, for eksempel når du beregner integraler:

$$\int_0^1 3x^3 + 5x \, dx = 3 \int_0^1 x^3 \, dx + 5 \int_0^1 x \, dx = 3 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{4}$$

(Tenk på det bestemte integralet som en funksjon som tar inn en funksjon og gir ut et tall.)

Matriser

En $m \times n$ -matrise A er et tableau med tall

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Kolonner:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Rader:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriseprodukt

Dersom A er en $m \times n$ -matrise og B en $n \times p$ -matrise, er elementet c_{ij} i produktet $C = AB$ gitt ved

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

altså skalarproduktet mellom rad nummer i i A og kolonne nummer j i B . Dersom $p = 1$, tenker vi på B som en kolonnevektor, og på AB som en lineærkombinasjon:

$$AB = b_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Det er lurt å trene på matrisemultiplikasjon, så det sitter i fingrene.

Identitetsmatrisen

En $n \times n$ -matrise med 1 på diagonalen og 0 ellers

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den fungerer slik at $AI = IA = A$ for alle A , samme oppførsel som tallet 1 under multiplikasjon.

Determinant

Determinanten til en $n \times n$ -matrise er det fortegnede volumet av det n -dimensjonale parallelepipedet utspent av matrixens kolonner (eller rader; dette volumet er det samme, selv om parallelepipedet ser annerledes ut). For 2×2 -matriser:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

og for 3×3 -matriser:

$$\begin{aligned} \det A &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

Det finnes formler for $n \times n$ -determinant. Denne kan du slå opp senere i livet om du må.

Invers

En $n \times n$ -matrise A har invers A^{-1} hvis og bare hvis $\det A \neq 0$. For denne gjelder at $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Man finner inversmatrisen ved gausseliminasjon:

$$[A \mid I] \sim [I \mid A^{-1}]$$

Det finnes også formler for A^{-1} basert på determinanter i A . Disse kan en sjelden gang være nyttig å kjenne til, men er først og fremst for spesielt interesserte.

Egenvektorer

En $n \times n$ -matrise A har egenvektor $x \neq 0$ med tilhørende egenverdi λ dersom

$$Ax = \lambda x$$

egenvektorer. Dersom det finnes n lineært uavhengige egenvektorer, kan man finne en diagonal matrise D (med egenverdiene) og en matrise P (med egenvektorene som kolonner) slik at

$$A = PDP^{-1}$$

Analyse

Funksjon

En funksjon $f : A \rightarrow B$ er en regel som spesifiserer ett og bare ett element i verdimengden B til hvert element i definisjonsmengden A . Alt som kommer ut av f skrives $f(A)$. Dette er en delmengde i B og kalles bildet til f . Dersom $A = \mathbb{N}$ kalles f en følge.

En funksjon er injektiv dersom $f(x) = f(y)$ impliserer at $x = y$.

Litt folkelig kan vi si at grafen til f ikke går ned og så snur og går opp igjen.

Dersom $f : A \rightarrow f(A)$ er injektiv, eksisterer $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$.

Litt folkelig kan vi si at det går an å løse likningen $y = f(x)$ for x , og skrive $x = f^{-1}(y)$.

Algebraens fundamentalteorem

Et polynom

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

kan alltid faktoriseres

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = \prod_{i=1}^n (z - z_i),$$

der $z_i \in \mathbb{C}$ er løsninger av likningen

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$$

Grenseverdi

Vi sier at $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har grenseverdien L i x dersom det for enhver $\epsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at

$$0 < |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Kontinuerlig funksjon

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert i x dersom

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x).$$

Deriverbarhet

En funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar i x dersom

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

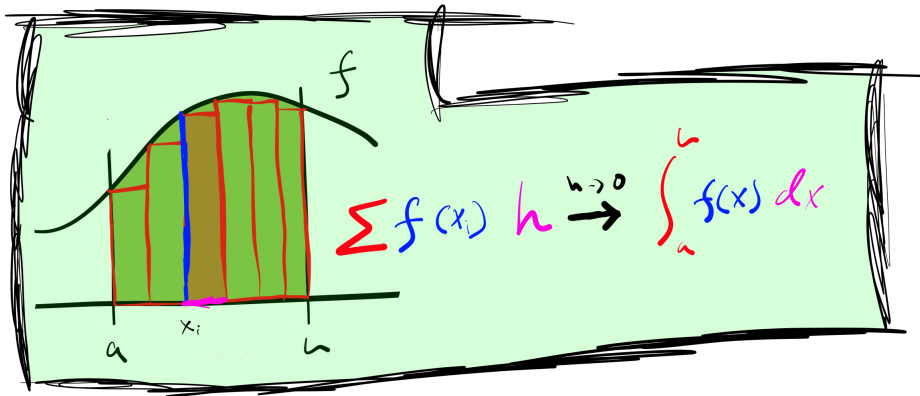
eksisterer. Dersom f' er en kontinuert funksjon, sier vi at f er kontinuert deriverbar.

Integrerbarhet

La f være en begrenset funksjon på $[a, b]$. Dersom det for hver $\epsilon > 0$ finnes en partisjon P av intervallet $[a, b]$ slik at

$$U(P) - L(P) < \epsilon,$$

sier vi at f er integrerbar. Her er $U(P)$ øvre riemannsum og $L(P)$ nedre riemannsum.



Analysens fundamentalteorem

Dersom det eksisterer en F slik at $F' = f$, er

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Dersom f er kontinuerlig, kan man også tenke at

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Noen integralformler

Volum ved dreining av $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ om y -aksen:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Volum ved dreining av $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ om x -aksen:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Buelengden til $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Viktige trigonometriske formler

Du kommer veldig langt med å huske

$$\cos(\alpha + \theta) = \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta$$

og

$$\sin(\alpha + \theta) = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta$$

for nesten alle andre trigonometriske formler kan utledes fra disse.

Substituer for eksempel $-\theta$ for θ , og få

$$\cos(\alpha - \theta) = \cos \alpha \cos(-\theta) - \sin \alpha \sin(-\theta) = \cos \alpha \cos \theta + \sin \alpha \sin \theta$$

og sett $\alpha = \pi$ i denne for å få

$$\cos(\alpha - \pi) = \cos \alpha \cos \pi + \sin \alpha \sin \pi = -\cos \alpha$$

eller $\alpha = \theta$ for å få

$$1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$$

eller $\alpha = -\theta$ for å få

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

eller legg de to siste sammen og få

$$1 + \cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha$$

eller trekk dem fra hverandre og få

$$1 - \cos(2\alpha) = 2 \sin^2 \alpha$$

Eulers formler

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Taylors teorem

Dersom f er en $n + 1$ ganger kontinuerlig deriverbar funksjon på et intervall som inneholder a og x , finnes en s mellom a og x slik at

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(s)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$$

Du kan tenke på dette som

$$f(x) = p_n(x) + e_n(x, s)$$

der p_n er et polynom som i området rundt a er en ok tilnærming til f , og e_n er feilen til denne tilnærmingen. For $n = 1$ får vi

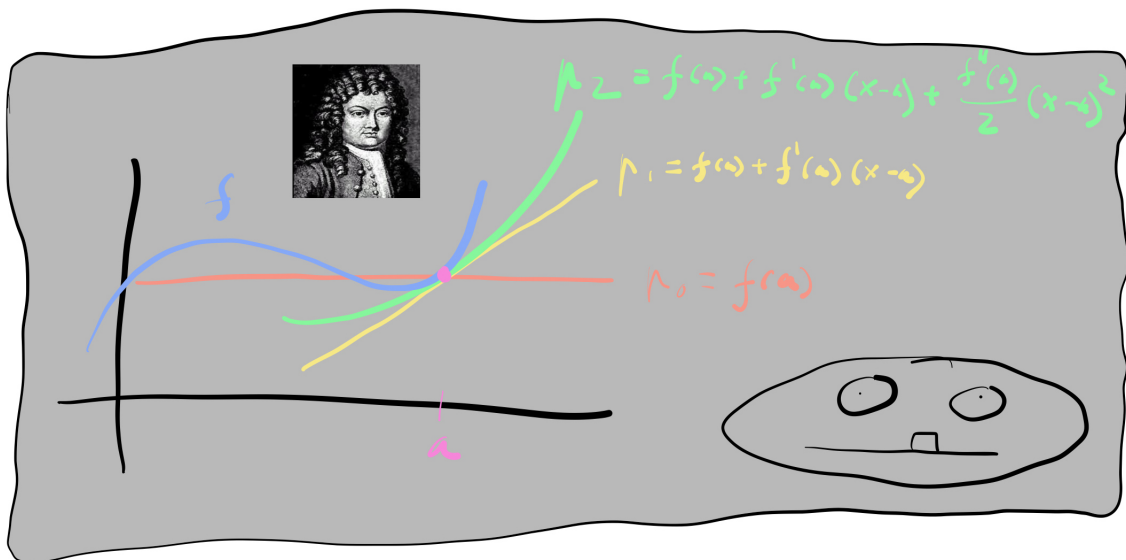
$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

som du forhåpentligvis kjenner igjen som ettpunktsformelen for tangentlinjen. Jo høyere n desto bedre tilnærming.

Taylors teorem finnes også i en integralvariant:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^n(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x (x - s)^n f^{n+1}(s) ds$$

Dette kan man tenke på som en generalisering av analysens fundamentalteorem for $n + 1$ ganger kontinuerlig deriverbare funksjoner.



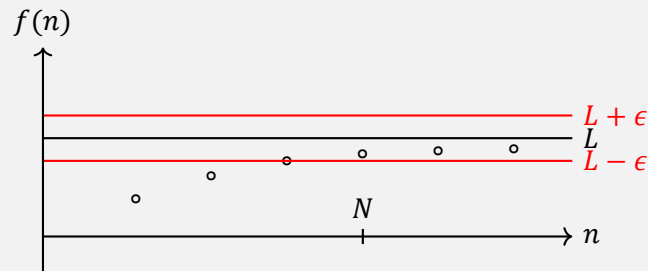
Følger og rekker

Konvergent følge:

En følge $f(n)$ konvergerer mot L dersom det for enhver ϵ finnes en N slik at $n > N$ impliserer

$$|f(n) - L| < \epsilon$$

Det er underforstått i forrige definisjon at vi først og fremst er interessert i små ϵ . Uansett hvor liten ϵ man velger, er det bare å gå langt nok ut i følgen, og så vil alle etterfølgende ledd ligge og vake i en avstand fra L som aldri blir større enn ϵ .

**Konvergent rekke:**

En rekke

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

er konvergent dersom partialsummene

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$$

danner en konvergent følge.

Absolutt konvergens:

En rekke konvergerer absolutt dersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$$

konvergerer. En konvergent rekke som ikke konvergerer absolutt, sies å konvergere betinget.

To viktige rekker:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Konvergenstester for rekker

p-rekke:

Rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerer dersom $p > 1$ og divergerer dersom $p \leq 1$.**Alternierende rekke:**Dersom $f(n)$ er en monotont synkende og positiv følge som konvergerer mot null, er rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

konvergent, og $|\sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n f(n)| \leq f(k+1)$.**Sammenlikningstesten:**

Dersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|$$

konvergerer, konvergerer også

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Forholdstesten:La f være en følge, og la

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)}.$$

Dersom $|\rho| > 1$ er $\sum f$ divergent. Dersom $|\rho| < 1$ er $\sum f$ konvergent. Dersom $|\rho| = 1$ gir testen ingen informasjon.**Grensesammenlikningstesten:**La f og g være følger, og la

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}.$$

Dersom $\rho > 0$ og $\sum g$ er divergent, er også $\sum f$ divergent.Dersom $\rho < \infty$ og $\sum g$ er konvergent, er også $\sum f$ konvergent.

Viktige taylorrekker

Dersom du beviser en haug med teoremer som er noko dryge for oss og lar $n \rightarrow \infty$ i Taylors teorem, får man noe som kalles taylorrekker. Funksjoner som kan skrives som en slik rekke kalles analytiske funksjoner. Her er et par viktige eksempler:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

Man kan stort sett herje med disse og finne andre taylorrekker, for eksempel:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{27x^3}{3!} + \frac{243x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos ix = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (|x| < 1)$$

men bevisene for at dette går bra, er også noko dryge for oss.

Differensiallikninger

Det finnes mange løsnings teknikker for å løse differensiallikninger. Men disse er pensum i R2, og derfor skriver jeg dem ikke ned her. Det er allikevel lurt å repetere dem litt. Den beste kilden er nok Lindstrøm første kalkulusbok, kap. 10, eller kap. 1 i Kreyszig.

En viktig og grunnleggende differensiallikning

Initialverdiproblemet

$$\dot{x} + ax = 0 \quad x(0) = x_0$$

har entydig løsning

$$x(t) = x_0 e^{-at}$$

En annen viktig og grunnleggende differensiallikning

La A være en $n \times n$ -matrise med en egenvektor v med tilhørende egenverdi λ . Funksjonen

$$x(t) = c e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

der c er en vilkårlig konstant, er en løsning av

$$\dot{x} = Ax$$

Dersom A er diagonaliserbar, finnes det n lineært uavhengige egenvektorer $v_1, v_2, \dots, v_n$, og følgelig n lineært uavhengige løsninger av systemet:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n$$

Numeriske metoder

Numeriske metoder for ikkelineære algebraiske likninger

Newtons metode er

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

og den leter etter løsninger til

$$f(x) = 0.$$

Fikspunktiterasjonen er

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

og den leter etter løsninger til

$$x = g(x).$$

Trapesregelen for integrasjon

Man girer opp $[a, b]$ med $n + 1$ punkter

$$x_k = a + k \frac{b - a}{n}.$$

Metoden er

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right)$$

Numeriske metoder for differensiallikninger

Eulers eksplisitte metode:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_n)$$

Eulers implisitte metode:

$$x_{n+1} = x_n + hf(x_{n+1})$$

Trapesregelen:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(x_n) + f(x_{n+1}))$$

Heuns metode:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (f(x_n) + f(x_n + hf(x_n)))$$

Alle sammen løser initialverdiproblemet

$$\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$$

numerisk.