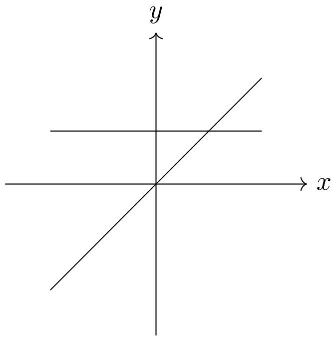
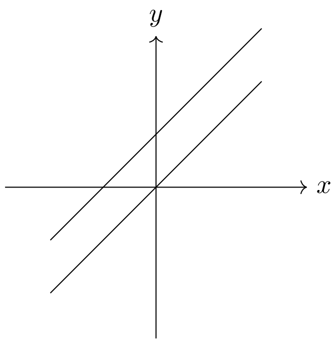
1.1. Likning (a) og (c) er lineære; (b) er ikke.

1.2. Det finnes mange eksempler som alle tilfredstiller at

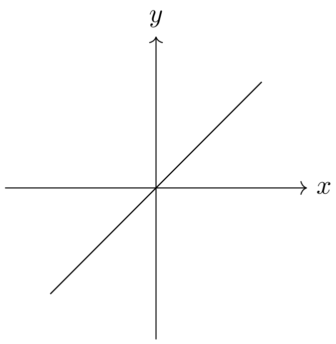
a) . . . linjene skjærer hverandre i ett punkt:



b) . . . linjene er parallelle:



c) . . . linjene er helt like:



1.3.

a) En lineær likning med tre ukjente kan tegnes som ett plan i x–y–z-rommet.

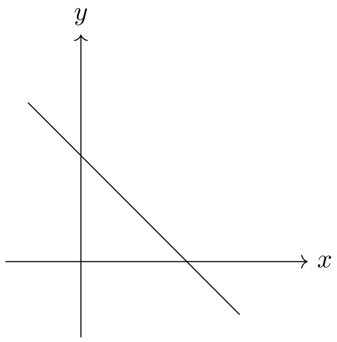
b) Likningen $z = 3$ svarer - geometrisk - til et plan som skjærer z-aksen normalt i $z = 3$. Vi gjenkjenner også

$$x + y + z = 5$$

som et plan i rommet. Begge likningene er oppfylt når planene skjærer hverandre. Ved å sette inn $z = 3$ i

$$x + y + 3 = 5$$

ser vi at $x + y = 2$. Løsningene ligger altså på linjen $x + y = 2$ i planet $z = 3$. Skisse av linjen sett ovenfra:



Prøv å skissere dette i x–y–z-rommet.

2.1. Matrise (a), (c) og (d) er på trappeform; (a) er på redusert trappeform.

2.2.

a) $x = \frac{5}{2}$, $y = 4$ og $z = -3$.

b) Radredusering viser at systemet har en fri variabel. Dette kan også observeres direkte ettersom siste likning er første likning multiplisert med to. Husk at vi nå har mange valg for å løse oppgaven, og vi gir derfor bare en skisse til hvordan du kan komme frem til et endelig svar. Eksempelvis kan vi ende opp med det ekvivalente systemet

$$\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Nå kan vi velge y eller z som fri variabel. Prøv gjerne ulike valg. Du kan sjekke om løsningene dine er korrekt ved å sette inn i likningene du opprinnelig skulle løse.

c) Det finnes ingen løsning.

2.3. Likningssystemene er ekvivalente fordi begge har entydig løsning $x = 1$, $y = 1$ og $z = 1$.

2.4. Hint: Teorem 2.2 sier at radekvivalente totalmatriser alltid er ekvivalente som likningssystem, de har altså like løsninger. Det holder derfor å vise at de korresponderende likningssystemene har ulike løsninger.

Merk: Vi ser at den eneste forskjellen på matrisene er at første- og tredje kolonne har byttet plass. Dette svarer til at første- og siste variabel bytter plass i korresponderende likningssystem. Kan du forklare dette?

2.5.

a) Kravene $p(1) = 2$, $p(2) = 3$ og $p(3) = 5$ gir følgende likningssystem:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

b) Løsningen er $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $c = 2$.

c) Sett inn 1, 2 og 3 i polynomet $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$ for å se at kravene i **a)** er oppfylt.

2.6.

La 1 betegne mulig og 0 umulig:

	$m < n$	$m = n$	$m > n$
ingen løsninger	1	1	1
én løsning	0	1	1
uendelig mange løsninger	1	1	1

2.7. Løsningen er

$$x = \frac{1}{ad - bc}(dm - bn)$$
$$y = \frac{1}{ad - bc}(an - cm).$$

Merk at $ad - bc \neq 0$ ettersom vi har antatt $ad \neq bc$.

2.8.

a) M er trivielt radekvivalent med M.

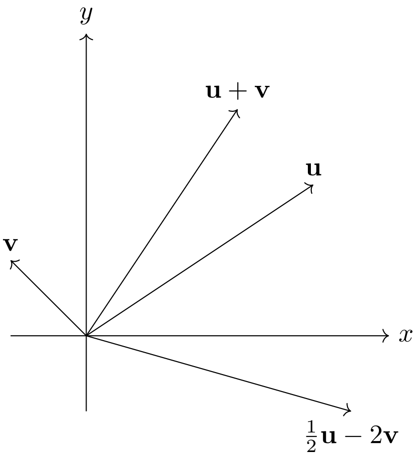
b) Hint: Alle radoperasjoner er reversible; multiplisere en rad med et ikke-null tall c kan reverseres ved å multiplisere samme rad med $\frac{1}{c}$; bytte om på to rader kan reverseres ved å bytte om på radene igjen; å legge til et multiplum av en rad til en annen kan reverseres ved å trekke fra det som ble lagt til. Dersom $M \sim N$ betyr det at vi har gjort et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ for å lage N fra M. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager M fra N?

c) Hint: Vi antar at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_1, \ldots, \mathrm{O}_n$ som lager L fra M, og at det finnes et endelig antall radoperasjoner $\mathrm{O}_{n+1}, \ldots, \mathrm{O}_{n+m}$ som lager N fra L. Klarer du, ut ifra dette, å finne et endelig antall radoperasjoner som lager N fra M?

3.1.

a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u}-2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2}\\-1\end{bmatrix}$.

b)



3.2. Se diskusjonen om matrise- og vektorligninger i kapittel **3**.

3.3.

a) Det er fire frie variabler. Husk at du kan sjekke om det endelige svaret ditt er riktig ved å multiplisere med A og se om resultatet faktisk blir null-vektoren.

b) Det finnes ingen løsning.

c) $x=\frac{83}{215}$, $y=\frac{187}{215}$ og $z=\frac{156}{215}$.

3.4.

a) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Det er derfor tre mulige fremgangsmåter som alle er riktig. Hint: La $\mathbf{v}_1$ være en av vektorene. Du ønsker å sjekke om $\mathbf{v}_1$ er en lineærkombinasjon av de to resterende vektorene. Dette kan formuleres med likningen

$$\mathbf{v}_1=a\mathbf{v}_2+b\mathbf{v}_3$$

hvor $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er de to resterende vektorene, og a og b er ukjente koeffisienter. Spørsmålet er altså om denne likningen har en løsning; som kan sjekkes ved regning. Prøv å skissere løsningen din i x–y-planet.

b) Et vilkårlig valg av en vektor vil kunne skrives som en lineærkombinasjon av de to andre. Fremgangsmåte som i **a)**, men merk at du ikke kan skissere løsningen din ettersom dette krever fire dimensjoner.

3.5.

a) Hint: Vi ønsker å finne en vektor $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ som ikke er en lineærkombinasjon av $\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$. Vektoren skal altså *ikke* tilfredstille likningen

$$x\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix},$$

som har totalmatrise

$$\begin{bmatrix}1&4&a\\5&18&b\\-3&4&c\end{bmatrix}.$$

Radreduser og velg a, b og c slik at systemet ikke har løsning. Eksempelvis fungerer $a=0$, $b=1$ og $c=0$.

b) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix}1&2&3&a\\2&3&4&b\\3&4&5&c\\4&5&6&d\end{bmatrix}.$$

c) Hint: Som i **a)**, men nå er totalmatrisen

$$\begin{bmatrix}8&-7&0&a\\-8&-7&3&b\\-4&5&-8&c\\-6&6&-4&d\end{bmatrix}.$$

3.6.

a) Spørsmålet gir ikke mening siden vektorene i **5. a)** er vektorer i $\mathbb{R}^3$.

b) Hint: Ligningen i **3. b)** har ingen løsning.

c) Hint: Ligningen i **3. c)** har én løsning.

3.7. Planet som inneholder $\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}$ er akkurat det lineære spennet deres. Altså, alle vektorer på formen

$$a\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}.$$

Alle valg av a og b er riktig.

3.8. Tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ spenner ut et parallellepiped. Disse ligger i et plan hvis og bare hvis volumet til dette parallellepipedet - determinanten - er lik null. Derfor må vi finne en tredje vektor $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ slik at determinanten til $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ ikke er lik null. Matematisk formulert:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\-7\\-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\-8\\-4\end{bmatrix}\neq 0.$$

Det finnes mange valg av a, b og c som fungerer. Eksempelvis fungerer $\begin{bmatrix}1\\-9\\20\end{bmatrix}$. Likningen $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}+z\mathbf{w}=0$ har kun triviell løsning; $x=0$, $y=0$ og $z=0$.

3.9. Introduksjon til løsning: Vi ønsker å beskrive problemet med lineær algebra. Et polynom er entydig bestemt av koeffisientene sine. Derfor kan all informasjon om et andregradspolynom $p(x)=ax^2+bx+c$

lagres i vektoren $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Summen av to andregradspolynom

$$ax^2 + bx + c$$

og

$$dx^2 + ex + f$$

kan skrives

$$(a+d)x^2 + (b+e)x + (c+f).$$

Vi summerer altså koeffisientene foran tilhørende potens av x. Dette svarer akkurat til addisjon av tilhørende vektorer:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende blir en konstant multiplisert med et andregradspolynom multiplisert i hver koeffisient:

$$k \cdot (ax^2 + bx + c) = (k \cdot a)x^2 + (k \cdot b)x + (k \cdot c),$$

som svarer til skalarmultiplikasjon av tilhørende vektor:

$$k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a \\ k \cdot b \\ k \cdot c \end{bmatrix}.$$

a) I dette lineær algebra-språket blir spørsmålet om $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$. Spørsmålet er altså om likningen

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix},$$

som svarer til totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 18 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

har en løsning. Svaret er nei.

b) Hint: I lineær algebra-språk skal du finne en vektor $\mathbf{t}$ slik at alle vektorer $\mathbf{r}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ og $\mathbf{t}$. La $\mathbf{t}$ være løsningen du fant i oppgave **3.5** del **a)**. Du kan nå sjekke at likningen

$$x\mathbf{p} + y\mathbf{q} + z\mathbf{t} = \mathbf{r}$$

har en entydig løsning for alle valg av vektorer $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Det tilhørende polynomet t - til $\mathbf{t}$ - er altså en løsning på oppgaven.

Merk: Grunnen til at $\mathbf{t}$ fungerer er at den er lineært uavhengig av $\mathbf{p}$ og $\mathbf{q}$. Derfor får vi tre lineært uavhengige vektorer som til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

3.10. Eksempel; $m = 2$, $n = 2$. En vektor i $\mathbb{R}^2$ spenner ut en linje, altså ikke hele $\mathbb{R}^2$. Dette generaliseres til $\mathbb{R}^n$, svaret er altså nei.

Hint: Dersom m vektorer, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$, spenner ut $\mathbb{R}^n$ betyr dette at vi alltid kan løse likningen $x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_m = \mathbf{b}$ hvor $\mathbf{b}$ er en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Dette svarer til m likninger med n ukjente hvor $m < n$. Kan et slikt system alltid ha løsning?
Merk: Senere skal vi se at m vektorer spenner ut et underrom av dimensjon $\leq m$, altså kan de ikke spenne ut hele $\mathbb{R}^n$ dersom $m < n$.

4.1.

a) Gir ikke mening.

b) $\begin{bmatrix} -36 & 7 & 13 \\ 24 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -38 & 3 & 9 \\ 14 & 11 & 5 \\ -16 & -8 & -36 \end{bmatrix}$

d) Gir ikke mening.

e) Gir ikke mening.

f) $\begin{bmatrix} -11 \\ 26 \\ -68 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -290 \\ -192 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

i) 69

4.2. $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

4.3. Den første har ingen løsninger; den andre har uendelig mange løsninger.

4.4. Hint: Du kan sjekke om en $n \times n$-matrise er inverterbar hvis du prøver å finne den inverse ved regning. Dette koker altså ned til å radredusere $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$.

a) Ikke inverterbar.

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

c) Ikke inverterbar (den er ikke kvadratisk).

d) Ikke inverterbar.

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

4.5. La $\mathbf{e}_i$ være vektoren med 1 i komponent i og null ellers. Husk at for en $n \times n$-matrise er $A\mathbf{e}_i$ kolonnevektor nummer i. Vi kan derfor løse **a)** og **c)** direkte; det er jo kolonnevektorene til A som er oppgitt. I del **b)** og **d)** må vi skrive ut likningene vi får, og deretter løse dem direkte. Eksempelvis, hvis vi skriver $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ og setter inn kravene fra del **b)** får vi

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_3 + a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette er fire likninger med fire ukjente. Tilsvarende fremgangsmåte fungerer i **d)**, men nå er A en 3×3-matrise. Du kan sjekke om det endelige svaret ditt er korrekt; tilfredstiller A kravene i oppgaven?

4.6.

a) Uttrykk X og B ved kolonnevektorer: $X = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Nå kan vi reformulere $AX = B$ som $\begin{bmatrix} A\mathbf{x}_1 & A\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$. Vi skal altså løse likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$. Dette kan selvfølgelig gjøres samtidig.

b) Likningen som korresponderer til den første kolonnen i B har uendelig mange løsninger; den andre har ingen løsning.

4.7.

a) La $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$. I forrige oppgave ble likningene for kolonnevektorene $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$ uavhengige. Vi kunne altså finne x_1 og x_3 uten at dette påvirket x_2 og x_4, og vice versa. Dette er ikke sant i denne oppgaven.

b) Innfør notasjon for elementene i matrisene: $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$. Totalmatrisen blir - med denne notasjonen - da

$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 & b_3 & a_2 & 0 & c_1 \\ b_2 & a_1 + b_4 & 0 & a_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & a_4 + b_1 & b_3 & c_3 \\ 0 & a_3 & b_2 & a_4 + b_4 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Merk: avhengig av hvordan du nummererte likningene kan du ha en totalmatrise hvor radene er byttet om på.

c) Med oppgitte matriser blir totalmatrisen fra **b)**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

som har løsning $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$ og $x_4 = \frac{1}{3}$. Løsningen er altså

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

4.8.

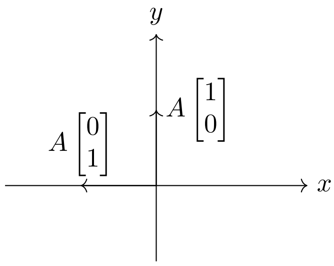
Vektoren må være på formen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Konstanten c kan være 0 eller 1. For $c = 1$ må $b = 0$ men vi kan velge a fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon med A. For $c = 0$ må $a = 0$ men vi kan velge b fritt. Dette svarer geometrisk til at vektorer som kun har komponent langs x-aksen ikke påvirkes av multiplikasjon med A.

Hint: Vi ønsker at $A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, som gir likningene $a = c \cdot a$ og $0 = b \cdot c$. Det er nå to muligheter: 1) $c = 1$ og $b = 0$, eller 2) $c = 0$ og $a = 0$.

4.9.

a)

Vektorene blir rotert 90 grader mot klokken.



b) Del opp en vilkårlig vektor $\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ i vektoren $a\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ langs x-aksen og $b\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ langs y-aksen. Husk at

$$A\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = aA\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + bA\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Fra **a)** ser vi at hver komponent av vektoren roteres 90 grader mot klokken. Altså roteres hele vektoren 90 grader mot klokken.

c) Den omvendte geometriske operasjonen er å rotere 90 grader med klokken. Derfor skulle man tro at det finnes en matrise som gjør dette og er inversen til A.

d) Inversen til A: $A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$. Du kan nå gjenta **a)**-**b)** med A^{-1} i stedet for A, og dermed sjekke at A^{-1} roterer en vektor 90 grader med klokken.

4.10.

a) Følger direkte fra definisjonen av matriseproduktet.

b) Hint: $A^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\\ \mathbf{a}_2^\top\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n^\top\end{bmatrix}$. Derfor blir

$$A^\top A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top\mathbf{a}_n\\ \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top\mathbf{a}_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top\mathbf{a}_n\end{bmatrix}.$$

Hva er antagelsen i oppgaven? Kan du fullføre oppgaven nå?

c) Matrisen A tilfredstiller kravene ettersom

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix} = 1,$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix} = 0 \text{ og}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix} = 0.$$

Inversen er derfor $A^{-1} = A^\top = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$. Du kan sjekke dette ved å bekrefte at både $AA^\top$ og $A^\top A$ er lik I.

5.1. Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ og $\mathbf{w}_3$ er lineært avhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

5.2.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$$

b) Lik fremgangsmåte som oppgave 5 kapittel 3.
Merk: Å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** svarer altså til å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**.

c) Teorem 5.12 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vektoren du fant i **b)** løser oppgave **9. b)** kapittel 3; husk at informasjonen om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ kan lagres – entydig – i en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$$

De

5.3.

a) Ved å radredusere matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

ser vi at vi får en fri variabel dersom vi prøver å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eller ekvivalent har vi ikke et pivotelement i hver kolonne. Teorem 5.7 sier da at vektorene er lineært avhengige.

b) Lik fremgangsmåte som i del **b)** av forrige oppgave.

c) Du kan sjekke at to vilkårlige vektorer fra **a)** og vektoren du fant i **b)** er lineært uavhengige. Det er altså tre lineært uavhengige vektorer i det lineære spanet til vektorene i **a)** og **b)**. Derfor spenner vektorene $\mathbb{R}^3$ (Teorem 5.12).

5.4. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.

5.5.

a) Feil.
Hint: Husk at matriseproduktet $A\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av kolonnene til A med komponentene til $\mathbf{v}$ som koeffisienter. Det finnes mange moteksempler . . .

Mer Hint: Det kan være lurt å velge A slik at kolonnene er lineært avhengige.

b) Riktig.
Spesialtilfellet $t = 2$: Antagelsen er at $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Den kritiske observasjonen for å løse oppgaven: regneregler for matriser gir oss at hvis $\mathbf{u} = c\mathbf{w}$, så

$$A\mathbf{u} = A(c\mathbf{w}) = c(A\mathbf{w}).$$

To vektorer som ligger på samme linje – er lineært avhengige – ligger altså fortsatt på samme linje etter multiplikasjon med A (rent geometrisk).

Logisk konklusjon: Men vektorene $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er antatt lineært uavhengig, de ligger altså ikke på samme linje. Derfor kan ikke $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være lineært avhengig; hvis de var lineært avhengig ville $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ vært lineært avhengig basert på observasjonen ovenfor.

Kan du nå løse oppgaven for en generell $t > 1$?
Hint: 'ligger på linje' betyr lineært avhengig i løsningen ovenfor.

5.1. Vektorene $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

Vektorene $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ og $\mathbf{w}_3$ er lineært avhengige og spenner ut $\mathbb{R}^2$.

5.2.

a) Radreduser matrisen med oppgitte vektorer som kolonner eller sjekk direkte at det ikke finnes noe tall c slik at:

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$$

b) Lik fremgangsmåte som oppgave 5 kapittel 3.
Merk: Å finne en vektor som er lineært uavhengig av vektorene i **a)** svarer altså til å finne en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av vektorene i **a)**.

c) Teorem 5.12 gir at de tre vektorene spenner ut $\mathbb{R}^3$.

Vektoren du fant i **b)** løser oppgave **9. b)** kapittel 3; husk at informasjonen om et andregradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ kan lagres – entydig – i en vektor

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$$

De

5.3.

a) Ved å radredusere matrisen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

ser vi at vi får en fri variabel dersom vi prøver å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Eller ekvivalent har vi ikke et pivotelement i hver kolonne. Teorem 5.7 sier da at vektorene er lineært avhengige.

b) Lik fremgangsmåte som i del **b)** av forrige oppgave.

c) Du kan sjekke at to vilkårlige vektorer fra **a)** og vektoren du fant i **b)** er lineært uavhengige. Det er altså tre lineært uavhengige vektorer i det lineære spanet til vektorene i **a)** og **b)**. Derfor spenner vektorene $\mathbb{R}^3$ (Teorem 5.12).

5.4. Påstand **a)** og **b)** er usanne; **c)** er sann.
Merk: **a)** er *nesten* riktig. Tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

kun har triviell løsning; $a = 0$, $b = 0$ og $c = 0$. Lineær avhengighet er det motsatte, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige dersom

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

har en ikke-triviell løsning; kan ta en av a, b og c ulik null. Dette er ekvivalent med at *en* av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av de to andre (del likningen med den koeffisienten som ikke er lik null). Påstanden i oppgaveteksten er at $\mathbf{u}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$. Men dette kan vi ikke garantere! Et eksempel: La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ (en vilkårlig vektor langs y-aksen). Nå er de tre vektorene lineært avhengige i $\mathbb{R}^2$, men det finnes ikke a og b slik at $\mathbf{u} = a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ fordi $\mathbf{u}$ ligger på x-aksen og de to andre ligger på y-aksen. Merk også at $\mathbf{w} = y\mathbf{v} + 0\mathbf{u}$ i dette tilfellet; $\mathbf{w}$ kan altså skrives som en lineærkombinasjon av de to andre.

5.5.

a) Feil.
Hint: Husk at matriseproduktet $A\mathbf{v}$ er en lineærkombinasjon av kolonnene til A med komponentene til $\mathbf{v}$ som koeffisienter. Det finnes mange moteksempler ...

Mer Hint: Det kan være lurt å velge A slik at kolonnene er lineært avhengige.

b) Riktig.
Spesialtilfellet $t = 2$: Antagelsen er at $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Den kritiske observasjonen for å løse oppgaven: regneregler for matriser gir oss at hvis $\mathbf{u} = c\mathbf{w}$, så

$$A\mathbf{u} = A(c\mathbf{w}) = c(A\mathbf{w}).$$

To vektorer som ligger på samme linje – er lineært avhengige – ligger altså fortsatt på samme linje etter multiplikasjon med A (rent geometrisk).

Logisk konklusjon: Men vektorene $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ er antatt lineært uavhengig, de ligger altså ikke på samme linje. Derfor kan ikke $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være lineært avhengig; hvis de var lineært avhengig ville $A\mathbf{v}_1$ og $A\mathbf{v}_2$ vært lineært avhengig basert på observasjonen ovenfor.

Kan du nå løse oppgaven for en generell $t > 1$?
Hint: 'ligger på linje' betyr lineært avhengig i løsningen ovenfor.

6.1.

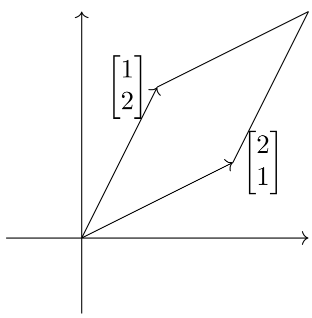
a) Determinanten er 0, kolonnene er lineært avhengige.

b) Determinanten er -3, kolonnene er lineært uavhengige.

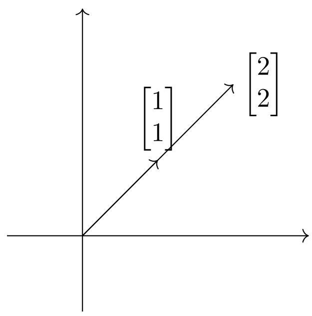
c) Determinanten er -14, kolonnene er lineært uavhengige. (Her kan det være lurt å bruke radoperasjoner for å beregne determinanten.)

6.2.

a) 3



b) 0



6.3. 430
Hint: Velg et referansepunkt og se på differansen fra de andre vektorene. Du har nå tre vektorer i $\mathbb{R}^3$ som definerer T. Observer at T er en sjettedel av volumet til parallellepipedet definert av vektorene.

6.4. Vi kan anta at vinklene θ og φ ligger i intervallet $[-\pi, \pi)$.

a) Det er kun vinkelen φ som har noe å si for om determinanten er positiv, negativ eller 0. Determinanten er 0 hvis φ er 0 eller $-\pi$, og ellers har determinanten samme fortegn som φ.

b) Hvis vi øker α_1 eller α_2, så øker determinanten; hvis vi minsker en av disse, så minker determinanten.

Hvis vi varierer φ innenfor intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$, så øker determinanten når φ øker. I intervallene $[-\pi, -\pi/2]$ og $[\pi/2, \pi)$ er det omvendt.

Å variere θ har ingen effekt på determinanten.

c) $\det A = \alpha_1\alpha_2 \sin\varphi$

6.5.

a) $bcxy$

b) Vi må ha at b, c, x og y alle ikke er lik null.

6.6.

a) Sant.
Hint: En matrise er inverterbar hvis og bare hvis determinanten ikke er lik null. Vi vet også at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Vi har antatt at $\det(AB) \neq 0$. Kan du fullføre beviset?

b) Sant.
Hint: $AA^{-1} = I$ og $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

c) Usant.

d) Sant. Produktregelen for determinant gir:

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$$

6.7. Determinanten må være lik null.
Hint: Vi antar at $A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = 0$ for $\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq 0$. Ved regnereglene for matriser blir dette $A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0$. Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har altså en ikke-triviell løsning; $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. Dette betyr – fra Teorem 5.7 – at kolonnene til A er lineært avhengige. Hva kan du nå si om determinanten til A?

6.8. $m \geq n$.
Skisse til løsning: Hva skjer hvis vi antar $m < n$? Svar: Siden kolonnene til A er vektorer i $\mathbb{R}^n$ og vi har $n > m$ vektorer, må kolonnene til A være lineært avhengige. Husk at

$$A^\top A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_1^\top \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_2^\top \mathbf{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n^\top \mathbf{a}_n \end{bmatrix},$$

hvor $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ er kolonnene til A. Du kan nå bruke at kolonnene til A er lineæret avhengige til å argumentere for at kolonnene til $A^\top A$ er lineært avhengige. Derfor må determinanten være lik null.

6.9. $\det(A \cdot A^\top) = 936$, $\det(A^\top \cdot A) = 0$.

7.1. I svarene nedenfor vil vi liste opp egenvektorer, og deretter egenrommet til hver egenverdi i samme rekkefølge.

a) Egenverdier: 3, -1. Egenrom: linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

b) Egenverdier: 3, -1, 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

c) Egenverdi: 0. Egenrom: Linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.
Merk: Dette er et eksempel på at geometrisk multiplisitet er strengt mindre enn algebraisk multiplisitet.

d) Egenverdi: 3, 8. Egenrom: Planet utspent av $\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$, linjen utspent av $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$.
: Merk: Dette er et eksempel på at egenvektorer med lik egenverdi kan være lineært uavhengige.

7.2.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: x-aksen og y-aksen.

b) Vektorer langs y-aksen blir null-vektoren ved multiplikasjon av A; vektorer langs x-aksen er uendret ved muliplikasjon av A.

7.3.

a) Egenverdi: 0,1. Egenrom: linjene utspent av $(1, 1)$ og $(-1, 1)$.

b) Vektorer langs $(1, -1)$-linjen blir null-vektoren ved multiplikasjon; vektorer langs $(-1, 1)$-linjen er uendret ved muliplikasjon.
Merk: Man kan tolke x-aksen som linjen utspent av $(1, 0)$ og y-aksen som linjen utspent av $(-1, 1)$. Dette er altså helt lik situasjonen som i forrige oppgave, men nå er egenrommene rotert med 45 grader.

7.4.

a) Dersom vi prøver å løse $\det(A - \lambda I) = 0$ får vi polynomlikningen $\lambda^2 + 1 = 0$. Denne har ingen (reelle) løsninger.

b) Matrisen roterer vektorer med -90 grader. Men en likning på formen $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ betyr at A skalerer $\mathbf{x}$ med en faktor c uten at $\mathbf{x}$ roteres.

7.5.

a) $\begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$

b) Matrisen er akkurat den som har svaret i del **a)** som kolonner:

$$T_\theta = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

c) Vi må ha $\theta = 0$; ingen rotasjon.

7.6.

a) Feil. Vi får generelt et n-tegradspolynom som kan ha alt fra null til n løsninger (det er maksimalt n egenverdier). Det har vært mange eksempler på dette tidligere i øvingen.

b) Sant. Vi har – per definisjon – en ikke-null vektor $\mathbf{x}$ som tilfredsstiller $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ hvor $c \neq 0$. Derfor har vi funnet en vektor $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x}$ ikke er lik null-vektoren. Men da kan A umulig være null-matrisen; hvis alle elementene i A var lik null ville $A\mathbf{x}$ vært lik null for alle valg av $\mathbf{x}$.

c) Sant. Det er et eksempel i en tidligere oppgave.

7.7. Hint: Egenverdiene til A er løsninger på polynomet $\det(A - \lambda I) = 0$. Tilsvarende er egenverdiene til $A^\top$ løsninger på polynomet $\det(A^\top - \lambda I) = 0$. Observer at $(A - \lambda I)^\top = A^\top - \lambda I$. Bruk hintet i oppgaveteksten på matrisen $B = A - \lambda^\top$.

7.8.

a) Egenverdier: 1, 2, -5, 77.
Hint: Hva er determinanten til en matrise på trappeform?

b) Alle egenrommene blir éndimensjonale. Her er, for hver egenverdi λ_i, en egenvektor $\mathbf{v}_i$ som utspenner egenrommet til λ_i:

λ_i	1	2	-5	77
$\mathbf{v}_i$	$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-5\\-6\\14\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}77\\76\\0\\1425\end{bmatrix}$

c) Nei. Vi må løse en fjerdegradslinking, som kan bli meget vanskelig. For generell n: Nei; vi må løse n-tegradslikninger.

7.9.

a) Vi vet at nullvektoren per definisjon ikke er en egenvektor. Vi ganger A med hver av de andre vektorene, og ser hva vi får:

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\40\\60\\80\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}102\\74\\66\\18\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}28\\6\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}40\\20\\40\\60\end{bmatrix} = 20\begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}120\\80\\40\\80\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}160\\120\\80\\40\end{bmatrix} = 40\begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Vi fant fire egenvektorer, tilhørende de to egenverdiene 20 og 40. Vi ser ganske lett at de to vektorene

$$\begin{bmatrix}3\\2\\2\\1\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ikke er egenvektorer.

b) La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\\3\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 20, og la

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\\2\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\1\end{bmatrix}$$

være egenvektorene fra del (a) som hører til egenverdien 40. Du kan sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige (ingen av dem er en skalar ganger den andre) og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Det betyr at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1 \text{ og } \mathbf{w}_2$$

er lineært uavhengige, siden vi vet at det ikke kan finnes lineære avhengigheter mellom egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier (teorem 7.15 (a)).

(Merk at det er nødvendig å først sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige og at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$ er lineært uavhengige. Du kan ikke bare bruke teorem 7.15 (a) direkte på alle de fire vektorene, fordi de ikke hører til fire forskjellige egenverdier.)

Hvis det nå finnes en vektor $\mathbf{u}$ som enten

1. ... er en egenvektor tilhørende 20 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, eller
2. ... er en egenvektor tilhørende 40 som ikke ligger i $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, eller
3. ... er en egenvektor som tilhører en annen egenverdi enn 20 eller 40,

så får vi at

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \text{ og } \mathbf{u}$$

er fem lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^4$. Det er ikke mulig, så det kan ikke finnes noen slik vektor $\mathbf{u}$.

Dette betyr at vi har funnet alle egenverdier og egenvektorer for A, og de er:

Egenverdien 20 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$

Egenverdien 40 med egenrom $\mathrm{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$

7.10. Full løsning: Hvis c er en egenverdi tilfredsstiller den – per definisjon – $A\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ for en ikke-null vektor $\mathbf{x}$. Kombiner dette med antagelsen om at $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ for å se at $\mathbf{x}$ tilfredsstiller $c^2\mathbf{x} = c\mathbf{x}$. Omformuler denne likningen til $(c^2 - c)\mathbf{x} = 0$. Ettersom $\mathbf{x}$ ikke er null-vektoren, må en komponent i $\mathbf{x}$ ikke være lik null (hvorfor?), og derfor må $c^2 - c = 0$. Dette er en andregradslikning med løsning $c = 0$ eller $c = 1$.

7.11.

a) Vi vet at egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige, og da følger det fra teorem 6.11 at matrisen V er inverterbar.

b) Vi regner ut

$$\begin{aligned}
V^{-1}AV &= V^{-1}\begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= V^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}V^{-1}\lambda_1\mathbf{v}_1 & V^{-1}\lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda_1 V^{-1}\mathbf{v}_1 & \lambda_2 V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n V^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= D\begin{bmatrix}V^{-1}\mathbf{v}_1 & V^{-1}\mathbf{v}_2 & \cdots & V^{-1}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\
&= DV^{-1}V\\
&= D,
\end{aligned}$$

der

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

er diagonalmatrisen bestående av egenverdiene til A.

Da kan vi dessuten legge merke til at vi har

$$A = VV^{-1}AVV^{-1} = VDV^{-1}.$$

(Oppgaven spurte ikke om dette, men det er likevel en interessant observasjon, og den hjelper oss med å løse neste deloppgave.)

c) Lag en diagonalmatrise D med egenverdiene på diagonalen, og en matrise V med egenvektorene som kolonner:

$$D = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \text{og} \quad V = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 6 & 4\\ 2 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

Da ser du fra del (b) at matrisen $A = VDV^{-1}$ oppfyller kravene i oppgaven. Regn ut inversen til V på vanlig måte; da får du:

$$V^{-1} = \begin{bmatrix}8 & -1 & -2\\ -2 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Nå kan du gange sammen matrisene og ende opp med:

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix}-9 & 2 & 2\\ -36 & 9 & 6\\ -22 & 4 & 6\end{bmatrix}$$