# Øving 1

TMA4110 høsten 2018

## Oppgaver til kapittel 1

**1.** Hvilke av disse likningene er lineære?

**a)** $14x + 3y = 2x + 1 - 5z$

**b)** $x + 2xy + y = 1$

**c)** $\frac{x+y}{2} = z$

**2.** Lag et lineært likningssystem med to likninger og to ukjente som

**a)** ... har entydig løsning.

**b)** ... ikke har noen løsning.

**c)** ... har uendelig mange løsninger.

I hver deloppgave: Tegn grafene til de to likningene i systemet ditt.

**3.** En lineær likning med to ukjente kan tegnes som en rett linje i $x$–$y$-planet.

**a)** Hvordan kan vi på tilsvarende måte se for oss en lineær likning med tre ukjente?

**b)** Se på følgende likningssystem:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Tegn en figur som illustrerer løsningene av hver av disse likningene og løsningene av systemet.

## Oppgaver til kapittel 2

**1.** Hvilke av disse matrisene er på trappeform? Hvilke av dem er på redusert trappeform?

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**d)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**2.** Løs likningssystemene.

**a)** $\begin{cases} 2x - 4y + 9z = -38 \\ 4x - 3y + 8z = -26 \\ -2x + 4y - 2z = 17 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x + 3y + 6z = 4 \\ 2x + 8y + 16z = 8 \\ 2x + 6y + 12z = 8 \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y - z = 1 \end{cases}$

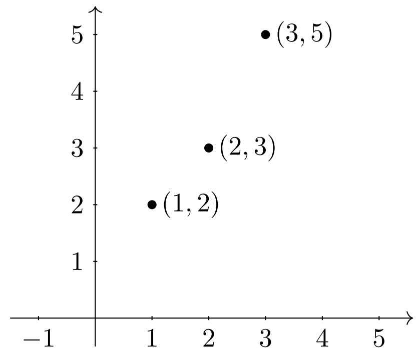
**3.** Er følgende to likningssystemer ekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

**4.** Er følgende to matriser radekvivalente? Begrunn svaret ditt.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

**5.** La $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$ være tre punkter i planet. Vi skal finne et andregradspolynom $ax^2 + bx + c$ slik at grafen går gjennom de tre punktene.




**a)** Sett opp et lineært likningssystem for $a$, $b$ og $c$.

**b)** Løs systemet, og finn andregradspolynomet som går gjennom alle punktene.

**c)** Sjekk at svaret ditt i **b)** er riktig.

**6.** Anta at vi har et likningssystem med $m$ likninger og $n$ ukjente. Hvilke av de ni forskjellige tilfellene i følgende tabell er mulige?

| | $m < n$ | $m = n$ | $m > n$ |
|---|---|---|---|
| ingen løsninger | | | |
| én løsning | | | |
| uendelig mange løsninger | | | |

**7.** Se på likningssystemet

$$\begin{cases} ax + by = m \\ cx + dy = n \end{cases}$$

der $a$, $b$, $c$, $d$, $m$ og $n$ er konstanter, og vi antar at $ad \neq bc$.

Hvor mange løsninger har systemet? Finn løsningen(e) uttrykt ved $a$, $b$, $c$, $d$, $m$ og $n$.

Hint: Start med å (i) multiplisere første rad med $d$ og andre rad med $b$, eller (ii) multiplisere første rad med $c$ og andre rad med $a$. Ta hensyn til at noen variabler kan være null.

**8.** Vis at følgende påstander er sanne for alle matriser $M$, $N$ og $L$:

**a)** $M \sim M$.

**b)** Hvis $M \sim N$, så: $N \sim M$.

**c)** Hvis $M \sim L$ og $L \sim N$, så: $M \sim N$.

# Øving 2

## Oppgaver til kapittel 3

**1.** La $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$.

**a)** Regn ut $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

**b)** Tegn en figur som viser vektorene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ og $\frac{1}{2}\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ i planet.

**2.** Skriv alle ligningssystemene fra oppgave **2.2** i øving 1 som

**a)** . . . vektorlikninger.

**b)** . . . matriselikninger.

**3.** Løs ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for

**a)**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**b)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**c)**

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -8 & -7 & 3 \\ -4 & 5 & -8 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**4.** Finn ut om en vektor er en lineærkombinasjon av de andre:

**a)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**b)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**5.** Finn en vektor som ikke er en lineærkombinasjon av:

**a)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**b)**

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

**c)**

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

**6.** Er $\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ en lineærkombinasjon av vektorene i

**a)** . . . oppgave **5. a)**?

**b)** . . . oppgave **5. b)**?

**c)** . . . oppgave **5. c)**?

**7.** Finn en tredje vektor i samme plan som disse to vektorene:

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

**8.** La $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være disse vektorene i $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Finn en vektor

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

slik at $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ spenner ut $\mathbb{R}^3$, og løs likningen $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} + z\mathbf{w} = 0$.

**9.** La $p$ og $q$ være følgende polynomer:

$$p(x) = x^2 + 5x - 3$$
$$q(x) = 4x^2 + 18x + 4$$

**a)** La $s$ være polynomet $s(x) = x^2 + 8x + 2$. Finnes det konstanter $a$ og $b$ slik at

$$s(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$$

for alle $x$?

**b)** Finn et andregradspolynom $t$ som oppfyller følgende: For hvert andregradspolynom $r$ skal det være mulig å finne konstanter $a$, $b$ og $c$ slik at

$$r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x) + c \cdot t(x)$$

**10.** La $m < n$. Kan $m$ vektorer spenne ut $\mathbb{R}^n$?

# Øving 3

## Oppgaver til kapittel 4

**1.** La $A$ og $B$ være matriser, og $\mathbf{v}$ en vektor:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Regn ut (eller forklar hvorfor uttrykkene ikke gir mening):

**a)** $AB$ **d)** $B^2$ **g)** $BA\mathbf{v}$
**b)** $BA$ **e)** $A+B$ **h)** $B^\top$
**c)** $A^2$ **f)** $(A+I_3)\mathbf{v}$ **i)** $\mathbf{v}^\top\mathbf{v}$

**2.** La $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ være vektorer i $\mathbb{R}^2$, og $A$ en $2 \times 2$-matrise slik at:

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut $A\mathbf{w}$, der $\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

**3.** Løs de to likningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, der $A$, $\mathbf{b}_1$ og $\mathbf{b}_2$ er gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**4.** Er følgende matriser inverterbare? I så fall, finn den inverse og sjekk at svaret ditt er riktig.

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

**d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

**e)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**5.** Finn en kvadratisk matrise $A$ slik at:

**a)** $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

**b)** $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

**c)** $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99 \\ -1 \\ 145 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

**d)** $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ og $A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

**6.** La $A$ og $B$ være to $2 \times 2$-matriser. Betrakt likningen

$$AX = B,$$

hvor $X$ er en ukjent $2 \times 2$-matrise.

**a)** Forklar hvorfor likningen er ekvivalent med å løse to $2 \times 2$-likningssystemer samtidig. Hvordan generaliseres denne påstanden for $n \times n$-matriser?

**b)** Løs likningen for $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

**7.** La $A$, $B$ og $C$ være $2 \times 2$-matriser. Betrakt likningen

$$AX + XB = C,$$

hvor $X$ er en ukjent $2 \times 2$-matrise.

**a)** Hvorfor kan man *ikke* løse denne likningen som to $2 \times 2$-likningssystemer samtidig?

**b)** Skriv om likningen til fire likninger med fire ukjente. Hva er totalmatrisen?

**c)** Løs likningen når $A$, $B$ og $C$ er følgende matriser:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**8.** La $A$ være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kan du finne et tall $c$ og en vektor $\mathbf{v}$ (som ikke skal være nullvektoren) slik at $A\mathbf{v} = c\mathbf{v}$? I så fall, for hvilke valg av $c$ eksisterer en slik ikke-null vektor? Kan du gi en geometrisk forklaring på hva som skjer når du multipliserer $A$ med vektorene i de ulike tilfellene for $c$?

**9.** La $A$, $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være gitt ved:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**a)** Skisser $A\mathbf{e}_1$ og $A\mathbf{e}_2$ i planet. Hva har skjedd med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ geometrisk når de er blitt ganget med $A$?

**b)** Hva skjer – geometrisk – med en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^2$ når vi multipliserer med A?

**c)** Kan du gi en geometrisk forklaring på hvorfor $A$ burde være inverterbar? Har du et forslag til hvordan multiplikasjon med $A^{-1}$ burde endre en vilkårlig vektor (geometrisk)?

**d)** Finn den inverse matrisen til $A$, og sammenlign med svaret ditt i del **c)**.

**10.**
**a)** La

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

være to vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at prikkproduktet mellom $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \cdots + v_nw_n,$$

er det samme som matriseproduktet $\mathbf{v}^\top\mathbf{w}$.

**b)** La $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}$ være en $n \times n$-matrise slik at $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i = 1$ for alle $i$, og $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0$ for $i \neq j$. Vis at $A^{-1} = A^\top$.

Hint: Hva er radene i matrisen $A^\top$?

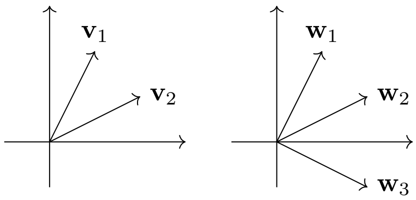
**c)** Sjekk at matrisen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

oppfyller antagelsene i del **b)**, og bruk dette til å bestemme $A^{-1}$. Sjekk at svaret ditt er riktig.

## Oppgaver til kapittel 5

**1.** De to bildene viser vektorer i $\mathbb{R}^2$.




I hvert tilfelle: Er vektorene på tegningen lineært uavhengige? Utspenner de $\mathbb{R}^2$? Begrunn svarene dine.

**2.**

**a)** Sjekk at vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\5\\-3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}4\\18\\4\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

**b)** Finn en tredje vektor $\mathbf{v}$ som sammen med vektorene i **a)** er lineært uavhengige.

**c)** Vis at $\mathbf{v}$ og vektorene i **a)** til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$. Sammenlign med oppgave **9. b)** i kapittel 3.

**3.**

**a)** Sjekk om vektorene

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}$$

er lineært uavhengige.

**b)** Finn en vektor $\mathbf{v}$ som er lineært uavhengig av hver av vektorene i **a)**.

**c)** Bruk teorien om lineært uavhengige vektorer til å vise at vektorene i **a)** og vektoren $\mathbf{v}$ til sammen spenner ut $\mathbb{R}^3$.

**4.** Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke.

**a)** Hvis tre vektorer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært avhengige, så finnes det to tall $a$ og $b$ slik at:

$$\mathbf{u} = a \cdot \mathbf{v} + b \cdot \mathbf{w}$$

**b)** Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er lineært uavhengige, og $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ lineært uavhengige.

**c)** Hvis $m > n$, så kan vi ikke ha $m$ lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^n$.

**5.** La $A$ være en $m \times n$-matrise, og la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Finn ut om følgende påstander er sanne eller ikke (gi et bevis eller et moteksempel).

**a)** Hvis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

**b)** Hvis $A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_t$ er lineært uavhengige, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t$ også lineært uavhengige.

## Oppgaver til kapittel 6

**1.** Regn ut determinanten til følgende matriser og avgjør – basert på dette – om kolonnene er lineært uavhengige:

**a)** $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$

**c)** $\begin{bmatrix}2 & -5 & 3 & 4 & 0\\2 & -4 & 7 & 2 & 1\\-6 & 15 & -9 & -12 & 1\\4 & -8 & 14 & 5 & -6\\-2 & 5 & 4 & 5 & -4\end{bmatrix}$

**2.** Skisser parallellogrammet utspent av følgende vektorer i $\mathbb{R}^2$, og regn ut arealet.

**a)** $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

**3.** Regn ut volumet av tetraederet i $\mathbb{R}^3$ med

$$(8,8,4), \quad (16,0,0), \quad (1,1,9) \quad \text{og} \quad (8,11,-4)$$

som hjørner.

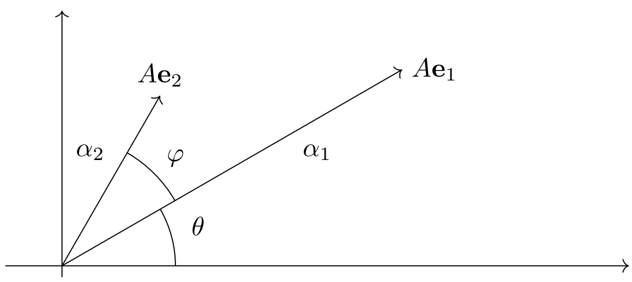
**4.** La $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ være enhetsvektorene i $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

En $2 \times 2$-matrise $A$ kan beskrives ved hjelp av fire tall $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\theta$ og $\varphi$, der:

$\alpha_1$ er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_1$
$\alpha_2$ er lengden av vektoren $A\mathbf{e}_2$
$\theta$ er vinkelen (mot klokken) opp til vektoren $A\mathbf{e}_1$
$\varphi$ er vinkelen (mot klokken) fra $A\mathbf{e}_1$ til $A\mathbf{e}_2$

Disse er illustrert på figuren under.




**a)** Hvordan kan du, basert på tallene $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\theta$ og $\varphi$, se om determinanten til $A$ er positiv, negativ eller 0?

**b)** Forklar hvordan determinanten til $A$ endrer seg hvis vi endrer én av de fire verdiene $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\theta$ og $\varphi$, mens vi lar de tre andre forbli som de er.

**c)** Finn det $A$ uttrykt ved $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\theta$ og $\varphi$.

**5.** La $A$ være matrisen

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & z \end{bmatrix}.$$

**a)** Finn $\det A$ uttrykt ved $a, b, c$ og $x, y, z$.

**b)** For hvilke $a, b, c$ og $x, y, z$ er $A$ inverterbar?

**6.** Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Gi et bevis eller moteksempel i hvert tilfelle.

**a)** La $A$ og $B$ være $n \times n$-matriser. Hvis $AB$ er inverterbar, så er både $A$ og $B$ inverterbare.

**b)** Anta at $A$ er en inverterbar matrise. Da har vi at

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

**c)** Hvis $A$ og $B$ er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(A + B) = \det A + \det B.$$

**d)** Hvis $A$ og $B$ er $n \times n$-matriser, så er

$$\det(AB) = \det(BA).$$

**7.** La $A$ være en $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. Anta at $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, men at $A\mathbf{u} = A\mathbf{v}$. Hva kan du da si om determinanten til $A$?

**8.** La $A$ være en $m \times n$-matrise slik at

$$\det(A^\top \cdot A) \neq 0.$$

Hva kan du da si om $m$ og $n$?

**9.** La $A$ være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finn $\det(A \cdot A^\top)$ og $\det(A^\top \cdot A)$.

## Oppgaver til kapittel 7

**1.** Finn egenverdier og tilhørende egenvektorer til følgende matriser.

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

Hint for del **d)**: Polynomdivisjon. Hvis ikke $\lambda = 1$ fungerer, prøv $\lambda = 2$. Hvis ikke $\lambda = 2$ fungerer, prøv $\lambda = 3, \ldots$

**2.**

**a)** Regn ut egenverdiene til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

**b)** Skissér egenrommene.
Hint: Du har løst denne oppgaven tidligere.

**3.**

**a)** Regn ut egenvektorene til

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

og finn tilhørende egenrom.

**b)** Skissér egenrommene.

**4.**

**a)** Vis at matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ikke har noen egenverdier.

**b)** Gi en geometrisk forklaring på del **a)**.

**5.**

**a)** Finn vektorene som svarer til at

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er blitt rotert med $\theta$ radianer.

**b)** Utled formelen for $2 \times 2$-matrisen $T_\theta$ som roterer vektorer $\theta$ radianer mot klokken ved multiplikasjon.
Hint: Hva skjer når du ganger $T_\theta$ med $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$?

**c)** For hvilke verdier av $\theta$ har $T_\theta$ en egenverdi? Gi en geometrisk forklaring.

**6.** Avgjør om følgende påstander er sanne eller ikke. Begrunn svaret ditt.

**a)** En $n \times n$-matrise har alltid $n$ egenverdier.

**b)** Dersom $A$ har en ikke-null egenverdi $c$, så kan ikke $A$ være lik null-matrisen.

**c)** To egenvektorer til en matrise $A$ som svarer til samme egenverdi kan være lineært uavhengige.

**7.** La $A$ være en $n \times n$-matrise. Vis at $A$ og dens transponerte $A^\top$ har like egenverdier.
Hint: Husk at determinanten til en matrise $B$ og dens transponerte $B^\top$ er like.

**8.**

**a)** Regn ut egenverdiene til

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77 \end{bmatrix}.$$

**b)** Finn egenrommene til de ulike egenverdiene.

**c)** $A$ er en $4 \times 4$-matrise. Er det alltid enkelt å finne egenverdiene til en $4 \times 4$-matrise? Mer generelt, er det alltid enkelt å finne egenverdiene til $n \times n$-matriser?

**9.** La $A$ være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} 28 & 30 & -20 & -2 \\ 6 & 40 & -10 & -4 \\ 4 & 10 & 20 & -6 \\ 2 & 20 & -30 & 32 \end{bmatrix}$$

**a)** Hvilke av vektorene

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er egenvektorer for $A$?

**b)** Finn alle egenverdiene til $A$, og de tilhørende egenrommene.

**10.** La $A$ være en $n \times n$-matrise slik at $A^2 = A$. Hva kan du da si om egenverdiene til $A$?
Hint: Prøv å finne noen forskjellige matriser $A$ som er slik at $A^2 = A$. Kan du finne en slik matrise som ikke har noen egenverdier? En som har én egenverdi? To egenverdier? Flere enn to?

**11.** La $A$ være en $n \times n$-matrise som har $n$ forskjellige egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Lag en $n \times n$-matrise

$$V = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix},$$

der $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor som hører til egenverdien $\lambda_1$, og $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor som hører til egenverdien $\lambda_2$, og så videre.

**a)** Kan du finne ut om matrisen $V$ er inverterbar eller ikke?

**b)** Dersom $V$ er inverterbar, hvordan ser matrisen $V^{-1}AV$ ut?

**c)** Finn en $3 \times 3$-matrise som har egenverdier 1, 2 og 3, med tilhørende egenvektorer

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$