

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - TEST I - LF**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 16

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☒

sort/hvit ☒ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Dette løsningsforslaget er skrevet for at det skal være lærerikt for deg å lese det. Under hver oppgave er det en kommentar som forklarer hvorfor nettopp denne oppgaven er relevant å ha kjennskap til. Når du skal gjøre eksamen kan du selvfølgelig skrive mer konsist.

Oppgave 1 Vi begynner med å finne det karakteristiske polynomet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^3$$

og registrerer at det finnes en repetert egenverdi $\lambda = 1$ med multiplisitet 3. Vi finner egenverdiene ved å løse systemet

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som altså blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

De to første likningene i dette systemet impliserer at $v_2 = v_3 = 0$, mens v_1 kan være hva som helst, siden den ikke inngår i likningssystemet en gang. Egenvektorene til $\lambda = 1$ blir følgelig

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Siden matrisen kun har en lineært uavhengig egenvektor, er den ikke diagonaliserbar, og vi kan ikke finne en diagonalmatrise D slik at

$$A = PDP^{-1}.$$

Kommentar: I dette semesteret er det kun pensum å vite hva en egenvektor er og den mest grunnleggende teknikken for å finne dem. Mer avansert teori om egenvektorer kommer i TMA4106.

Oppgave 2 Dette er et likningssystem på formen

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$$

der matrisen A er identisk med den i forrige oppgave. Vi vet at derfor at

$$\mathbf{x}(t) = ce^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der c er en vilkårlig konstant, er en løsning. Det finnes to lineært uavhengige løsninger til, men de er litt mer kompliserte å regne ut, så det er ikke pensum i høst. Initialverdikravet

$$x_1(0) = 1$$

$$x_2(0) = 0$$

$$x_3(0) = 0$$

er tilfredsstilt dersom $c = 1$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kommentar: Dette er en funksjon $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$. Vi skal studere denne typen funksjoner ganske grundig rett etter jul i TMA4106.

Oppgave 3 La oss anta at det finnes en annen løsning $h(t)$. Dersom vi deriverer produktet $e^{at}h(t)$, får vi

$$\frac{d}{dt}e^{at}h(t) = e^{at}\dot{h}(t) + ae^{-at}h(t) = x_0e^{at}(\dot{h}(t) + ah(t)) = 0$$

så med andre ord må

$$e^{at}h(t) = c$$

slik at

$$h(t) = ce^{-at}$$

og bruker vi initialkravet $h(0) = x_0$, ser vi til og med at

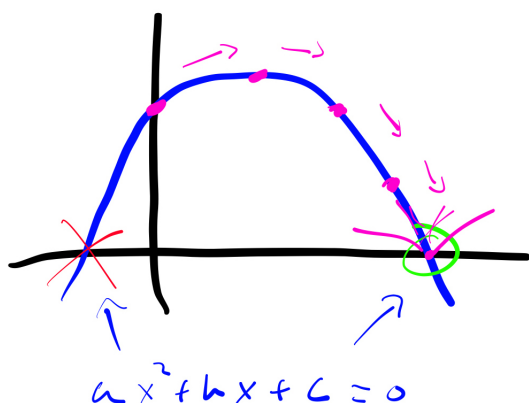
$$h(t) = x_0e^{-at} = x(t).$$

Med andre ord har problemet

$$\dot{x} + ax = 0 \quad x(0) = x_0$$

kun en løsning.

Kommentar: Dette beviset er et triks man nesten må kunne, men det kan være litt viktig å vite om et matematisk problem har entydig løsning eller ikke, for ellers kan det jo være man gjør feile prediksjoner. Det er generelt veldig lett å oppdrive fysiske problemstillinger der den matematiske modellen introduserer løsninger som ikke har fysisk relevans. Det enkleste eksemplet på dette er kanskje et prosjektil som følger en parabelbane. En parabelbane har to skjæringspunkter med x -aksen, men kun ett av dem er punktet der prosjektilet treffer bakken.



Et annet eksempel er initialverdiproblemet

$$\dot{x} - \sqrt{x} = 0 \quad x(0) = 0$$

som har to løsninger, både

$$x(t) = \frac{t^2}{4}$$

og

$$x(t) = 0.$$

Dette er et spesialtilfelle av Torricellis lov, som handler om væskestrøm ut av et kar med et hull i.

Oppgave 4 Et tredjeordens polynom er et polynom på formen

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

der $a \neq 0$. Dersom polynomet skal gjennom punktene $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ og $(3, 5)$, har vi fire likninger

$$\begin{aligned} 1 &= p(0) = d \\ 2 &= p(1) = a + b + c + d \\ 3 &= p(2) = 8a + 4b + 2c + d \\ 5 &= p(3) = 27a + 9b + 3c + d \end{aligned} \quad \text{eller} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

om du foretrekker det.

Siden den første likningen sier at $d = 1$, kan vi umiddelbart forenkle til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array} \right]$$

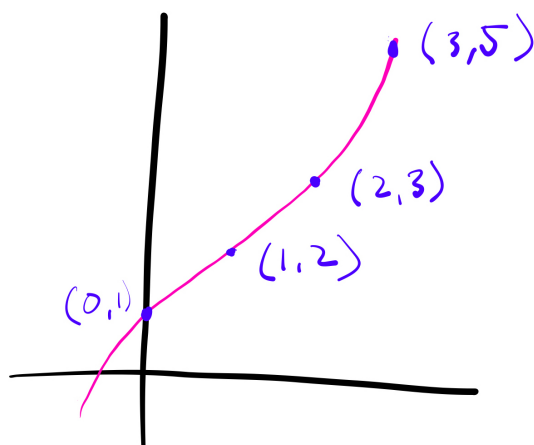
og gausseliminere

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 2 \\ 27 & 9 & 3 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 18 & 24 & 23 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{array} \right]$$

slik at $c = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{2}$ og $a = \frac{1}{6}$. Polynomet blir

$$p(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x + 1$$

Her er plot:



Kommentar: Det å finne et polynom p som reiser gjennom et sett med punkter kalles interpolasjon, og matrisen i likningssystemet kalles vandermondematriksen. Det finnes imidlertid enklere og bedre måter for å finne p på enn å sette opp et lineært likningssystem. Dette skal vi se mer på i TMA4106, da skal vi bruke polynominterpolasjon til å konstruere mer avanserte numeriske metoder for integrasjon.

Polynominterpolasjon er også en forløper til lineærregresjon, som du skal lære i statistikk og sannsynlighetsregning (TMA4245) til våren. Lineærregresjon betyr at man prøver å finne en rett linje

$$p(x) = ax + b$$

som passer bra til n punkter (x_k, y_k) . Man setter opp likningssystemet

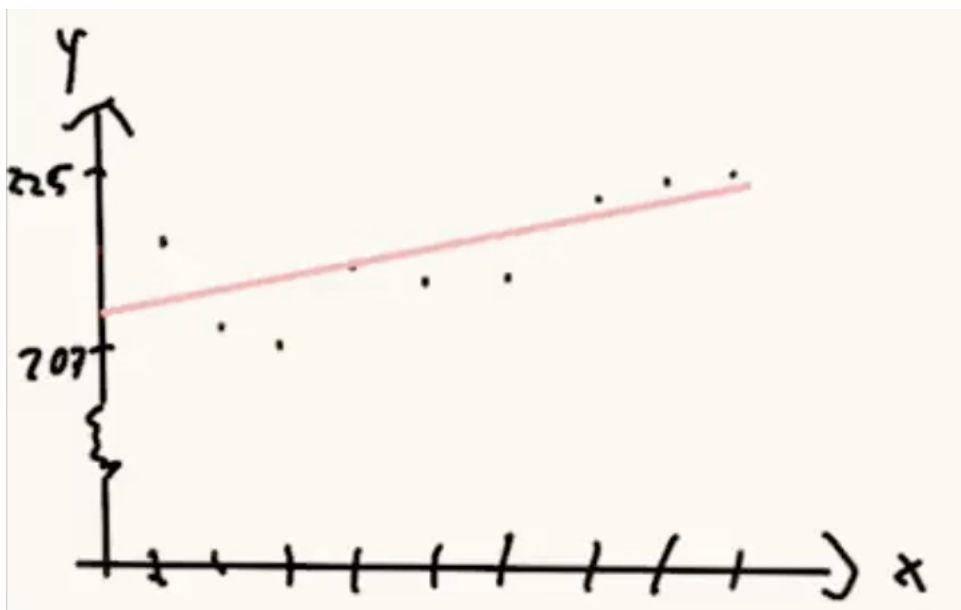
$$p(x_1) = ax_1 + b = y_1$$

$$p(x_2) = ax_2 + b = y_2$$

$$\vdots$$

$$p(x_n) = ax_n + b = y_n$$

og prøver bruker noe som kalles minste kvadraters metode for å finne a og b .



Oppgave 5 La oss anta at

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

der m og n er heltall med ingen felles faktorer, slik at brøken er maksimalt forkortet. Vi ganger nå hele likningen med n , og kvadrerer, slik at vi får

$$2n^2 = m^2.$$

Av denne likningen ser vi at m^2 må være et partall. Men dersom m^2 skal være et partall, må jo m være et partall, og dette betyr at m^2 må være delelig med fire. Dette betyr at $m^2/2$ er et partall, og hvis vi skriver

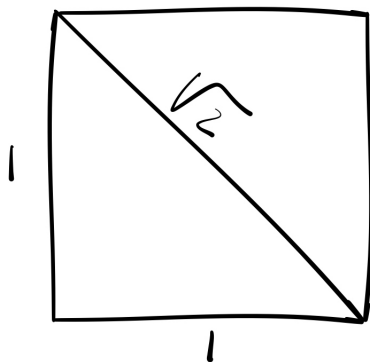
$$n^2 = \frac{m^2}{2},$$

ser vi at n^2 er et partall, på da må n være et partall. Men nå har vi oppnådd en selvmotsigelse. Vi vet jo at det må være mulig å velge m og n uten felles faktorer, og nå viser det seg at 2 må være en felles faktor allikevel. Med andre ord er det noe som er galt her. Det som er galt, er antagelsen om at man i det hele tatt kan skrive

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

for hele tall m og n .

Kommentar: Det er en ganske komplisert jobb å definere de reelle tallene ordentlig. At $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk har vært kjent for menneskeheten i noen tusen år, og det er interessant, fordi det betyr at det ikke finnes noe rasjonalt tall som beskriver lengden til diagonalen i et kvadrat med sidekant 1.



Man kan definere de reelle tallene på forskjellige måter. En måte er de såkalte Dedekindske snitt. Man tenker på et positivt reelt tall som noe som deler de positive rasjonale tallene i to deler. Man kaller det snitt fordi man tenker at man

klipper den rasjonale tallinjen i to, og klippet er et reelt tall. For eksempel kan man tenke på $\sqrt{2}$ som et par med mengder A og B der

$$A = \{x : x^2 < 2\}$$

$$B = \{x : x^2 > 2\}$$

Dette er selvfølgelig litt teknisk, men så ble dette ikke ordentlig funnet ut av før på 1870-tallet.

Man kan også tenke på reelle tall som ekvivalensklasser av konvergente rasjonale tallfølger. For eksempel er den rekursive følgen

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

en rasjonal følge som konvergerer mot $\sqrt{2}$. (Dette er Newtons metode anvendt på likningen $x^2 - 2 = 0$.) Vi tar denne følgen og putter den i en sekk med alle andre rasjonale følger som konvergerer mot $\sqrt{2}$, og så setter vi merkelappen $\sqrt{2}$ på denne sekken.

Antagelsen om at alltid kan forkorte en brøk slik at det ikke er felles faktorer i teller og nevner (vi lærer dette allerede på barneskolen), er heller ikke helt innlysende. Dersom dette hadde vært et kurs i tallteori, hadde vi ikke nøydt oss med antagelsen, men brettet opp ermene og tatt jobben med å bevise at det alltid går an.

Oppgave 6 Fikspunktiterasjonen er

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

og leter etter løsninger til likningen

$$x = g(x).$$

Vi må derfor begynne med å skrive om likningen til

$$\theta = \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

og fikspunktiterasjonen blir

$$\theta_{n+1} = \frac{1}{4} (2 \sin 2\theta_n + \pi)$$

Dette kan selvfølgelig gjøres på andre måter, men vi skal se at dette her går fint. Her er golfkode for å finne løsningen:

```
import numpy as np

theta=1 #initialgjetning

for i in range(100):
    theta=(2*np.sin(2*theta)+np.pi)/4 #fikspunktiterasjon
```

På eksamen må du nesten skrive ned noe sånt:

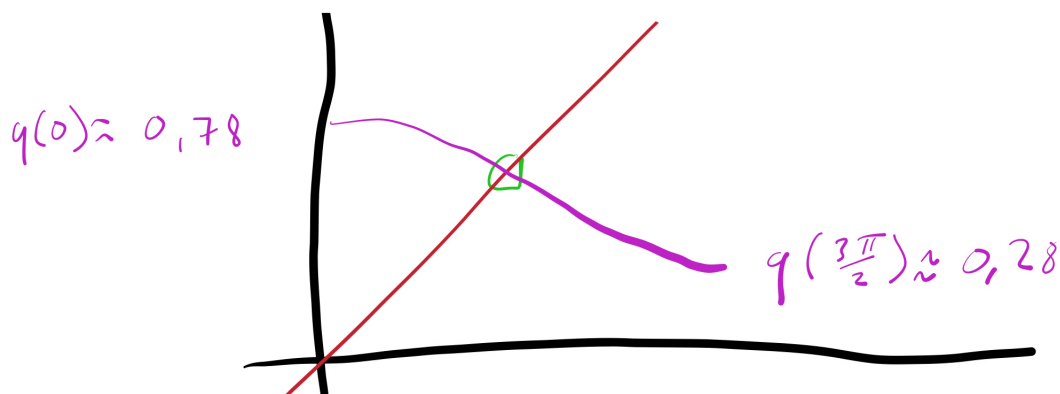
```
import numpy as np

theta = 1

for i in range(100):
    theta = (2 * np.sin(2 * theta) + np.pi) / 4
```

Dette føles nok litt rart, men jeg vet ikke om noen annen effektiv måte for å sjekke hvem som har programmert og hvem som ikke har programmert. Hvis noen har gode ideer, er jeg åpen for diskusjon, men i år blir det slik. Programmering er en viktig komponent i jobben med å forstå numeriske metoder.

La oss nå se på hvorfor vi kan forvente at iterasjonen konvergerer. For det første vil en rask sketsj av situasjonen:



fortelle oss at likningen bør ha en løsning et sted $\theta = 0$ og $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Vi vet at vi kan forvente konvergens dersom $|g'| < 1$ i området rundt løsningen, og siden

$$g'(\theta) = \cos 2\theta$$

ser vi at $|g'(\theta)| < 1$ dersom $0 < \theta < \frac{3\pi}{2}$. Hvis initialgjetningen (magefølelsen for omtrent hvor roten ligger) ligger i dette intervallet, bør fikspunktiterasjonen konvergere.

Kommentar: Det å vite at to funksjoner som skjærer hverandre faktisk skjærer hverandre, er ikke egentlig så innlysende som det kan se ut ved første øyekast. Skjæringssetningen sier at dersom $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon på $[a, b]$, og at $f(a) < f(b)$ og $f(a) < c < f(b)$, finnes en $x \in [a, b]$ slik at $f(x) = c$. Men her er det særdeles viktig at definisjonsmengden til f er $\mathbb{R}$ og ikke for eksempel $\mathbb{Q}$. Funksjonen $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ gitt ved $f(x) = x^2$ vil for eksempel aldri ta verdien 2, for det finnes jo ingen rasjonale tall x slik at $x^2 = 2$.

Når det gjelder fikspunktiterasjonens konvergens, har vi et teorem som sier at dersom g er en kontinuerlig deriverbar funksjon med både $a < g(x) < b$ og $|g'(x)| \leq L < 1$ på $[a, b]$, konvergerer fikspunktiterasjonen

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

mot r dersom $x_0 \in [a, b]$.

Dette følger av Taylors teorem. La oss anta at $x_n \in (a, b)$. Vi bruker Taylors teorem på g i r , og skriver

$$g(x_n) = g(r) + g'(s)(x_n - r)$$

for en s mellom x_n og r . Hvis vi bruker at $r = g(r)$ og $x_{n+1} = g(x_n)$, kan vi skrive

$$x_{n+1} - r = g(x_n) - g(r) = g'(s)(x_n - r).$$

Vi tar absoluttverdi på begge sider, og bruker at $|g'(s)| \leq L < 1$, siden $s \in (a, b)$:

$$|x_{n+1} - r| = |g'(s)(x_n - r)| \leq L|x_n - r| \leq L^{n+1}|x_0 - r|$$

Lar vi så $n \rightarrow \infty$, får vi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |x_{n+1} - r| \leq |x_0 - r| \lim_{x \rightarrow \infty} L^{n+1} = 0,$$

siden $L < 1$.

Oppgave 7 La oss begynne med å delbrøksoppspalte innmaten i rekken. Vi søker A og B slik at

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$$

Dersom vi ganger opp med $n(n-2)$ på begge sider, får vi likningen

$$1 = A(n-2) + Bn.$$

Nå er det slik at dersom venstre og høyre side skal være like, må de være like for hver potens av n . Det gir likningene

$$0 = A + B$$

og

$$1 = -2A$$

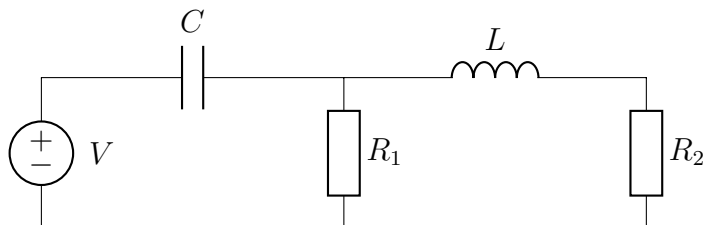
som burde gå greit å løse, det er jo ikke nødvendig å gausseliminere en gang, og vi kan skrive

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2(n-2)} - \frac{1}{2n}.$$

Vi setter nå dette inn i rekken, og ser mønsteret:

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Kommentar: Delbrøksoppspalting er kjedelig. Men dessverre er det veldig nyttig for elektroingeniører. Når du laplacetransformerer en lineær krets for å analysere den, for eksempel



får du alltid en stor grisete brøk som du må delbrøksoppspalte for å analysere. Brøken kalles systemfunksjonen eller transferfunksjonen, og du får lære om denne i ESDA I til våren og ESDA II til neste høst.

Å gjette korrekt form på delbrøksoppspaltingen, for eksempel

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$$

tar litt trening, men det finnes en test som avslører om du har gjort det feil. Dersom det lineære likningssystemet for de ubestemte koeffisientene ikke lar seg løse, har man feil form på oppspaltingen. For eksempel om man prøver å skrive

$$\frac{1}{n^2(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2},$$

får man

$$1 = An(n-2) + Bn^2,$$

og når man sammenlikner venstre og høyre side for hver potens av n , får man likningssettet

$$0 = A + B$$

$$0 = -2A$$

$$1 = 0$$

som åpenbart er inkonsistent.

Det går imidlertid fint å bomme litt om alle de korrekte leddene er blitt med. Tar man med et unødvendig ledd, for eksempel

$$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n^2} + \frac{C}{n-2}$$

får man

$$1 = An(n-2) + B(n-2) + Cn^2$$

som gir $B = 0$ og korrekt A og C .

Oppgave 8 Her er det lurt å skrive om litt. Hvis vi bruker at

$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$

(se huskefilen for tips om hvordan man husker trigonometriske formler uten å konsentrere seg) kan vi skrive

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\theta \cos \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - 2\sin^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \, d\theta - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta.$$

Merk bruken av at det bestemte integralet er en lineæravbildning! Det første integralet er null, det er enkelt å regne ut. Det andre integralet tar vi med kjerneregelen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta \, d\theta = \cos^3 \theta \Big|_{-\pi}^{\pi} = -1 - (-1) = 0$$

Kommentar: Dette integralet ser litt kjedelig ut, men er ganske viktig. For hele tall m og n gjelder faktisk at

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt = \begin{cases} \pi & \text{for } n = m \\ 0 & \text{for } n \neq m \end{cases}$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt \, dt = 0$$

Vi sier at sinus- og cosinusfunksjonene er ortogonale på $[-\pi, \pi]$, og dette får vi bruk når vi skal lære om fourierrekker i TMA4106.

Oppgave 9 Dette er en klassiker i TMA4100s magiske verden, og du finner Selveste Seips løsningsforslag her (tror jeg ihvertfall):
https://wiki.math.ntnu.no/_media/tma4100/eksamen/1f_tma4100_2014h.pdf

Kommentar: Omdreiningslegemer kan fremstå som ikke relevant for elektroingeniører. Men det er ikke riktig. I andre og tredje semester skal vi lære om dobbeltintegraler

$$\iint_D f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

både i matematikk og statistikk, og det er mye lettere å forstå om man forstår omdreiningslegemer først. Det er også viktig å forstå at integralet kan brukes til å beregne mye mer enn areal. Volum, ladning, lengde, og mange andre ting.

Oppgave 10 Denne bør alle elektroingeniører kunne løse i søvne. Dersom den ukjente strømmen er $x(t)$, gir Kirchhoffs spenningslov

$$k = Rx(t) + L\dot{x}(t),$$

som kan løses på mange måter. Her er tre forskjellige måter.

Separasjon:

Vi skriver

$$1 = \frac{L\dot{x}(t)}{k - Rx(t)}$$

som integreres til

$$t + c = -\frac{L}{R} \ln(|k - Rx(t)|).$$

Dersom vi skriver

$$-\frac{R}{L}(t + c) = \ln(|k - Rx(t)|)$$

og integrerer, får vi

$$|k - Rx(t)| = e^{-\frac{R}{L}(t+c)}.$$

Hvis du nå er veldig kunnskapsrik, har du observert at $x(t) = k/R$ er en konstant løsning av likningen (som ikke tilfredsstiller vår initialbetingelse), og vet du i tillegg at dette problemet har entydig løsning, ser du at $k - Rx(t)$ ikke kan bytte fortegn, for det ville bety at x krysset denne konstante løsningen, og det er umulig. Vårt initialkrav er $x(0) = 0$, så da vet vi at $k - Rx(t) > 0$ for alle t . Vi kan følgelig skrive

$$k - Rx(t) = e^{-\frac{R}{L}(t+c)},$$

slik at

$$x(t) = \left(k - e^{-\frac{R}{L}(t+c)}\right) / R.$$

Krever vi $x(0) = 0$, får vi

$$k = e^{-\frac{R}{L}c}$$

eller

$$-\frac{L}{R} \ln k = c$$

slik at

$$x(t) = \left(k - e^{-\frac{R}{L}\left(t - \frac{L}{R} \ln k\right)}\right) / R = \frac{k}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Å løse separable likninger kan være overraskende vanskelig, for man må løse opp noen absoluttverditegn fra tid til annen, og hvis man skal være dønn sikker på at det blir rett, krever dette en del kunnskap om litt dypere teori som ligger under og lurert. Hvis du synes differensiallikninger er litt vanskelig (det synes jeg) er dette kanskje ikke den beste strategien.

Integrerende faktor:

En durkdreven differensiallikningsløser ser raskt at integrerende faktor er $\frac{1}{L}e^{\frac{R}{L}t}$, slik at likningen etter multiplisering med denne blir

$$\frac{k}{L}e^{\frac{R}{L}t} = \frac{R}{L}x(t)e^{\frac{R}{L}t} + \dot{x}(t)e^{\frac{R}{L}t} = \frac{d}{dt} \left(x(t)e^{\frac{R}{L}t}\right)$$

og følgelig

$$x(t)e^{\frac{R}{L}t} = \frac{k}{R}e^{\frac{R}{L}t} + c$$

eller

$$x(t) = \frac{k}{R} + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Initialkravet $x(0) = 0$ gir nå $c = -\frac{k}{R}$, slik at

$$x(t) = \frac{k}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Balchen spesial:

Denne teknikken basert på en annen utledningsmåte for løsningen til

$$\dot{y}(t) + ay(t) = f(t)$$

Det første vi gjør, er å skrive opp løsningen for $f = 0$, altså løsningen av

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0.$$

Denne likningen kalles den homogene likningen. Løsningen kalles den homogene løsningen, og er som kjent gitt ved

$$y(t) = ce^{-at}.$$

Vi kan bruke denne til å utlede et uttrykk for løsningen til initialverdiproblemet

$$\dot{y}(t) + ay(t) = f(t) \quad y(0) = 0$$

En stor vitenskapsmann har en gang i tiden skjønt at dersom f ikke er en grusom funksjon, kan løsningen fint skrives som

$$y(t) = c(t)e^{-at},$$

der $c(t)$ er en ukjent funksjon. Vi setter dette uttrykket inn i likningen, og deduserer at

$$\begin{aligned} f(t) &= \dot{y}(t) + ay(t) \\ &= c'(t)e^{-at} - ac(t)e^{-at} + ac(t)e^{-at} \\ &= c'(t)e^{-at}. \end{aligned}$$

Men dette betyr at

$$c'(t) = e^{at}f(t),$$

og følgelig at

$$c(t) = \int_0^t e^{as}f(s) \, ds.$$

Løsningen blir

$$y(t) = e^{-at} \int_0^t e^{as}f(s) \, ds = \int_0^t e^{a(s-t)}f(s) \, ds.$$

Det siste integralet kalles en konvolusjon mellom $f(s)$ og e^{as} , og dette blir veldig viktig i senere i studiet. Merk at løsningen tilfredsstiller $y(0) = 0$. Dersom vi nå setter $f(t) = \frac{k}{L}$ og $a = \frac{L}{R}$, blir løsningen

$$y(t) = \frac{k}{L} \int_0^t e^{\frac{L}{R}(s-t)} \, ds = \frac{k}{R} \left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right)$$

Lundheims metode:

Denne likningo hev eg løyst
so mange gånger at eg veit
ka løysinga er. Ein fattig trøyst
å nytta sin røyst
når ein kjem i beit.
Livet er leitt.
Løysinga er $y(t) = \frac{k}{R} \left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right)$,
det rekna eg ut fyrste gang i 1979,
som Lemminkäinen eg sleit.

Jeg brukte omtrent denne metoden da jeg løste omtrent denne likningen på MAT111 (UiBs svar på TMA4100) i desember 2003. Jeg skrev at denne likningen hadde jeg løst så mange ganger at jeg visste hva løsningen var og ikke trengte løse den for å skrive den ned. Jeg fikk B på eksamen.

Atkins' metode:

Spør en matematiker. Hun vil fortelle deg at løsningen er

$$y(t) = \frac{k}{R} \left(1 - e^{-\frac{L}{R}t}\right)$$

Denne teknikken står faktisk i Atkins: Physical Chemistry, en av de store biblene om fysikalsk kjemi på mikro- og makronivå.

Kommentar: De aller fleste differensiallikninger kan ikke løses med penn og papir. Noen av de få som kan løses er veldig fysisk relevante, og de kan løses på mange forskjellige måter, der noen måter er vanskelige og noen er lette.

Noen metoder kommer raskt til løsningen med få regneoperasjoner, mens andre motiverer bygging av teori som kan komme til nytte på mer kompliserte likninger. Dette skal vi drive mye mer med i slutten av TMA4106, og i ESDA I skal du løse veldig mange likninger på formen

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = e^{j\omega t}.$$

Et resultat som ofte kommer til nytte, spesielt når man løser separable likninger, er at dersom f er kontinuerlig deriverbar på $\mathbb{R}$, og y tilfredsstiller

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) \quad y(a) = c,$$

er y entydig bestemt. Se kompendiet for bevis om du ikke tror på det.