NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - TEST II - LF

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 6

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Her er det nok lurt å begynne med å skrive om litt:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2}$$

og taylorrekken om $x = 0$ til cosinusfunksjonen:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

og så kombinere disse:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1+\cos x}{2} = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^4}{2\cdot 4!} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2\cdot(2n)!}$$

Kommentar:

Oppgave 2 Alle funksjonene involvert er analytiske, så her er det enklest å taylorutvikle så mye som mulig alle om $x = 0$. Vi vet jo at

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

og følgelig at

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

og

$$(e^x - 1 - x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{3!} + \cdots$$

Den siste er litt mer komplisert å skrive ut med summenotasjon, men vi kommer heldigvis bare til å trenge det første leddet. Fra

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad (|x| < 1)$$

kan vi komme oss til

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad (|x| < 1)$$

ved å substituere $-x$ for x, og til

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad (|x| < 1)$$

ved integrasjon, og til

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2(n+1)}}{n+1} \qquad (|x| < 1)$$

ved å substituere x^2 for x. Nå kan vi regne ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1 - x)^2}{x^2 - \ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} - \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{3!} + \cdots}{\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^8}{4} - \cdots} = \frac{1}{2}$$

Kommentar: Rekkeutvikling brukes visst når man må analysere ikkelineære kretser, for eksempel når man designer integrerte kretser.

Oppgave 3 Trapesmetoden for ordinære differensiallikninger er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n) + f(x_{n+1})\right)$$

og i vårt tilfelle blir det altså

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y_n^2 - y_n^3 + y_{n+1}^2 - y_{n+1}^3\right).$$

Denne likningen er ikke så lett å løse for y_{n+1}, så i hver iterasjon må vi bruke en numerisk likningsløser. Fikspunktiterasjonen er et pedagogisk (men numerisk dårlig!) valg, siden likningen allerede er på formen

$$y_{n+1} = g(y_{n+1})$$

og her er litt golfkode:

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


#gitter

n=1000 #antall punkter
T=200.0 #intervallet
h=T/n #gitterfinhet
t = np.arange(0.0, (n+1)*h, h) # det er lurt å sette av plass til t

#numerisk løsning

y=np.zeros(n+1) # det er lurt å sette av plass til y
y[0]=.01 # startverdi
```

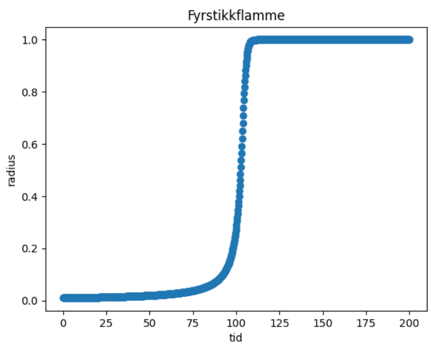
```
for k in range(n):
    y[k+1]=y[k]+h*(y[k]**2-y[k]**3) # initialgjetning for numerisk likningsløser
    z=100 # variabel som holder styr på konvergens til numerisk likningsløser

    while np.abs(y[k+1]-z)>.0005:
        z=y[k+1]
        y[k+1]=y[k]+h*(y[k]**2-y[k]**3+y[k+1]**2-y[k+1]**3)/2

#plotting

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, y,'o')
ax.set(xlabel='tid', ylabel='radius',title='Fyrstikkflamme')
fig.savefig("fyrstikk-fikspunkt.png")
```

Differensiallikningen er en modell av en fyrstikkflamme som blir tent, og figuren blir noe sånt:



Kommentar: Denne oppgaven kombinerer to viktige deler av pensum, numeriske metoder for algebraiske likninger, og numeriske metoder for ordinære differensiallikninger. Fikspunktiterasjonen er egentlig et dårlig valg, for h må være liten for at vi skal være trygg på konvergens, men poenget med implisitte metoder (slik som trapesmetoden) er nettopp at man kan tillate stor h. Derfor er Newtons metode et bedre valg, men da blir jo golfkoden enda mer grisete:

```
import matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


#gitter

n=1000 #antall punkter
T=200.0 #intervallet
h=T/n #gitterfinhet
t = np.arange(0.0, (n+1)*h, h) # det er lurt å sette av plass til t
```

```
#numerisk løsning

y=np.zeros(n+1) # det er lurt å sette av plass til y
y[0]=.01 # startverdi

for k in range(n):
    y[k+1]=y[k]+h*(y[k]**2-y[k]**3) # initialgjetning for numerisk likningsløser
    z=100 # variabel som holder styr på konvergens til numerisk likningsløser

    while np.abs(y[k+1]-z)>.0005:
        z=y[k+1]
        y[k+1]=y[k+1]-(y[k+1]-y[k]-h*(y[k]**2-y[k]**3+y[k+1]**2-y[k+1]**3)/2)/(1-h*(2*y[k+1]-3*y[k+1]**3)/2)

#plotting

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, y,'o')
ax.set(xlabel='tid', ylabel='radius',title='Fyrstikkflamme')
fig.savefig("fyrstikk-newton.png")
```

Oppgave 4 Her er kan vi bruke at $|\cos t| \leq 1$, og skrive

$$\left|\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \leq \int_1^\infty \frac{|\cos t|}{t^2}\,dt \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\bigg|_1^\infty = 1$$

Integralet er altså absolutt konvergent.

Oppgave 5 Her kan vi bruke samme teknikk

$$\left|\sum_1^\infty \frac{\cos n}{n^2}\right| \leq \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

men vi ser jo også at integraltesten impliserer konvergens, siden $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ og $\sum_1^\infty \frac{\cos n}{n^2}$ begge divergerer eller begge konvergerer.

Kommentar: At $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ er ikke mulig for oss å utlede nå, men vi skal se på det til våren, når vi har om fourierrekker. Det er nemlig slik (tro det eller ei) at

$$x = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,$$

på (π, π). Dette kan du se på som en slags dekomponering av $f(x) = x$ i et rom med uendelig mange dimensjoner. Koordinatretningene i dette rommet er $\sin nx$ for $n = 1, 2, 3\cdots$, og det finnes en uendeligdimensjonal generalisering av pytagoras som heter Parsevals sats:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Parseval%27s_identity`

Moderne elektroteknikk er utenkelig uten fourierrekker, så det er bare å glede seg.

Oppgave 6 Her er det bare å begynne med analysens fundamentalteorem:

$$F'(x) = \sqrt{x^3 - 1}$$

og sette inn i formelen

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

for buelengde:

$$\int_1^2 \sqrt{1 + \left(\sqrt{x^3 - 1}\right)^2}\, dx = \int_1^2 x^{3/2}\, dx = \frac{2}{5} x^{5/2} \bigg|_1^2 = \frac{2}{5}\left(4\sqrt{2} - 1\right)$$

Kommentar: Denne oppgaven vet jeg ikke om har noen fysisk relevans. Men du verden så gøy det er med analysens fundamentalteorem og formelen for buelengde og så videre.

Oppgave 7

a) Vi gausser i vei

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og velger $x_2 = s$, slik at $x_1 = -2s$ og $x_3 = s$, eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nå ser vi at kolonnene er lineært avhengige, siden

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Vi gausser igjen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 2 & -17 \\ 5 & 6 & 4 & -29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

og velger $x_2 = s$, slik at $x_1 = -5 - 2s$ og $x_3 = 2 + 2s$, eller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 8 Vi beregner

$$\begin{aligned}\det A - \lambda I &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 3 & 4-\lambda & 2 \\ 5 & 6 & 4-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left[(4-\lambda)(4-\lambda) - 12\right] - 2(3\cdot(4-\lambda) - 10) \quad = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 6\lambda \\ &= \lambda\left(\lambda - \frac{-9+\sqrt{57}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-9-\sqrt{57}}{2}\right)\end{aligned}$$

som gir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{-9+\sqrt{57}}{2}$ og $\lambda_3 - \frac{-9+\sqrt{57}}{2}$. Siden det er tre forskjellige egenverdier, må det også finnes tre lineært uavhengige egenvektorer, og A er følgelig diagonaliserbar.

Kommentar: Husket litt feil her, så måtte endre på oppgaven ettet å ha skrevet LF. Men bare slapp av, på eksamen er korrekturen litt nøyere.

Oppgave 9 Siden $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ er inverse funksjoner på $[0, \infty)$, og $f(0) = g(0)$ og $f(1) = g(1)$, ser vi at er er det irrelevant om vi dreier om x- eller y-aksen, volumet vil bli det samme. Med skivemetoden får vi

$$\pi \int_0^1 x\, dx - \pi \int_0^1 x^4\, dx = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

og med sylinderskallmetoden, får vi

$$2\pi \int_0^1 x\left(\sqrt{x} - x^2\right)\, dx = 2\pi\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

La S være området i xy-planet som er avgrensa av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$ mellom $x = 0$ og $x = 1$. Finn volumet av omdreiningslegemet som oppstår ved å dreie S om y-aksen.

Kommentar: Omdreiningslegemer er jo helt utrolig nyttig om du for eksempel ønsker å beregne volumet til en strømkabel med litt varierende tykkelse. Husk å ikke finne opp teknologi som hvalene kan sette seg fast i:
`https://www.nrk.no/tromsogfinnmark/kuttet-kabel-for-a-redde-hval-_-kan-koste-1_5-millioner-kroner-1.12758664`
og husk også at strandede hvaler kan eksplodere, man må være forsiktig:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Exploding_whale`