

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - TEST III

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Denne oppgaven kan løses på mange måter. Vi må en definisjonsmengde som gir at f er injektiv, altså at $f(x) = f(y)$ impliserer at $x = y$. På folkemunne sier vi at grafen til f ikke kan gå nedover og så snu og gå opp igjen. Observer først at

$$f'(x) = 2x - 2 > 0$$

når $x > 1$. Dette betyr at f er strengt voksende, og følgelig injektiv, på $[1, \infty)$. Vi kan derfor velge $A = [1, \infty)$, men vi kan også velge et intervall som er inneholdt i denne mengden, for eksempel $A = [1, 2]$, $A = [1, 3]$ eller $A = [2, 3]$. Alle fungerer like godt. Vi kan også observere at

$$f'(x) = 2x - 2 < 0$$

når $x < 1$, og se at for likeledes vil $A = [-3, -2]$ gjøre jobben.

For å finne f^{-1} må vi først velge en A . La oss ta $A = [-3, -2]$. Vi finner så funksjonsuttrykket for f^{-1} . Merk at $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$. Vi beregner

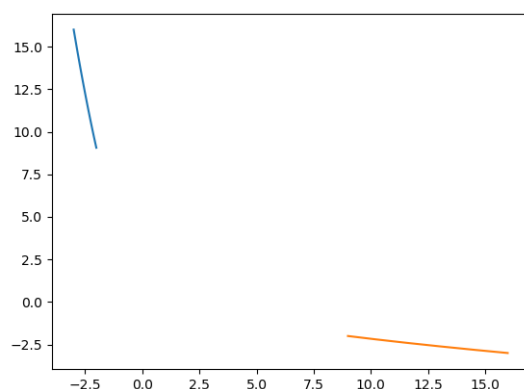
$$y = (x - 1)^2 \iff \pm\sqrt{y} = x - 1 \iff 1 \pm \sqrt{y} = x$$

Siden $x \in [-2, -3]$ og $\sqrt{y} \leq 0$, må vi velge

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}.$$

Definisjonsmengden til f^{-1} blir $[f(-2), f(-3)] = [9, 16]$.

For å oppsummere: Vi har at $f^{-1} : [9, 16] \rightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$. I plottet er f den blå biten, og f^{-1} den oransje.



Oppgave 2 Vi har jo utledet et uttrykk for taylorrekken til $\ln(1+x)$ i forelesning, men jeg husker ikke dette uttrykket i farten, og derfor må jeg utlede det ved å integrere den geometriske rekken. Den kan jeg nemlig skrive opp i søvne, og beregningen blir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \implies \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \implies \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Den siste rekken blir en konvergent alternerende rekke når $x = 1$, og vi ser at

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Kommentar: Minner om at rekkeutvikling dukker opp i design av ikkelineære system. Man rekkeutvikler systemfunksjonen om innsignalet, og så blir man i stand til å si noe vettugt om utsignalet. Spør Torunn nede på OV hvis du er nysgjerrig.

Oppgave 3 La oss begynne med å gausseliminere litt. Vi tar oppgave a og b i samme slengen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Fra denne gausselimineringen kan vi observere at svaret på b) er ingen løsning, siden vi får likningen $0 = 2$, og at svaret på a) er entydig løsning. Siden vi fikk entydig løsning i a) må kolonnene ha vært lineært uavhengige.

Kommentar: Matriseregning er som sennep. Noen elsker det og noen hater det, noen spiser det på alt og noen spiser det aldri. Men lineæralgebra er nok et av de feltene innen matematikk som dukker opp i flest anvendelser.

Oppgave 4 Siden $|\cos x| \leq 1$, er

$$\int_0^1 \left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right| dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$$

er integralet absolutt konvergent.

Kommentar: Hvorvidt integraler konvergerer eller ikke, trenger vi å ta stilling til når vi skal ha fouriertransform, som er gitt ved

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx = \hat{f}(w),$$

og laplacetransform, som er gitt ved

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s).$$

Analyse av lineære kretser med spoler og kondensatorer er utenkelig uten disse to.

Oppgave 5 Det enkleste her er kanskje å gange med integrerende faktor e^t , og skrive

$$\frac{d}{dt}(e^t y(t)) = e^t y'(t) + e^t y(t) = e^t \cos t,$$

integrere opp og få

$$e^t y(t) = \frac{1}{2} e^t (\cos t + \sin t) + C$$

og så bruke at $y(0) = 2$ og få at

$$2 = \frac{1}{2} + C$$

slik at $C = \frac{3}{2}$, og til slutt oppsummere med

$$y(t) = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) + \frac{3}{2} e^{-t}.$$

Kommentar: Denne kan løses med laplacetransform. Hvis du er interessert, kan du kanskje gjette deg til hvordan ved å kikke her (dette kommer til våren): <https://www.math.ntnu.no/emner/TMA4101/2021h/ovinger/ert-9-2.pdf>

Oppgave 6 Definisjonen av den deriverte er

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

og dersom vi setter $f(x) = |x|$ inn i denne og sjekker deriverbarhet for $x = 0$, får vi

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

som ikke eksisterer, siden

$$1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$$

Kommentar for de teoretisk interesserte: Dette er kanskje litt uvant, og mange vil kanskje ha en ryggmargsrefleks på å derivere f med derivasjonsregler og sjekke hva som skjer. Men det er altså slik at for eksempel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

er deriverbar i $x = 0$, til tross for at den deriverte er ikke kontinuert i $x = 0$.

Oppgave 7 Siden

$$f'(x) = \cos x$$

blir buelengden

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \cos^2 x} \, dx$$

Trapesmetoden er

$$\int_a^b f \approx \frac{1}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

Pythonskriptet under produserer tilnærmingen $L \approx 3.8201933461447943$.

```
import numpy as np

h=np.pi/10000

s = np.arange(0,np.pi, h)

integral=h*(sum(np.sqrt(1+np.cos(s)*np.cos(s)))-np.sqrt(2))

print(integral)
```

Kommentar: Buelengde ser sikkert kjedelig ut. Men tenk om du ønsker å regne ut total lengde strømledning i en spole bare ved å måle radius og antall viklinger? Dette går fint å regne ut med buelengde, og vi skal gjøre det i vår når vi får litt mer gørrkjedelig maskineri på plass.

Oppgave 8

a) Vi beregner

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 4 \\ 3 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)(5 - \lambda) - 12 = \lambda^2 - 7\lambda - 2 \\ &= \left(\lambda - \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{-7 + \sqrt{41}}{2} \right)\end{aligned}$$

Nå har vi regnet egenvektorer så mange ganger at vi vet jo at dersom vi har riktige egenverdier, skal egenvektoren til $\lambda_1 = \frac{-7 - \sqrt{41}}{2}$ tilfredsstille likningen

$$\left(2 - \frac{-7 - \sqrt{41}}{2} \right) v_1 + 4v_2 = 0$$

slik at

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -8 \\ 11 + \sqrt{41} \end{bmatrix}$$

er de tilhørende egenvektorene. Likeledes vil

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 17 - \sqrt{41} \\ -6 \end{bmatrix}$$

være egenvektorene til λ_2 .

b) Dette er nå bare å skrive opp:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = c_1 e^{\frac{-7 - \sqrt{41}}{2} t} \begin{bmatrix} -8 \\ 11 + \sqrt{41} \end{bmatrix} + c_2 e^{\frac{-7 + \sqrt{41}}{2} t} \begin{bmatrix} -6 \\ 17 - \sqrt{41} \end{bmatrix}$$

Kommentar: Ok, dette ble litt stygge tall i denne oppgaven. Sorry. Fant dem på uten å regne gjennom. Slikt skjer naturligvis ikke på eksamen, ihvertfall ikke så ofte, he he he. En gang var det en lærer da jeg gikk på Fana Gymnas som gav tre punkter på en prøve som skulle bli en trekant, og så hadde han ikke regnet gjennom og så lå de tilfeldigvis på en rett linje! Men det som er viktig å forstå er at egenvektorer er viktig for å analysere lineære kretser med spoler og kondensatorer. Det er også artig å forstå at den delen av kretsen i stereoanlegget ditt som lydsignalet faktisk passerer gjennom er ganske lineær, så når du skrur på knappene på equalizeren, justerer du faktisk på egenverdiene i systemet.