

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4101 Matematikk 1 for MTELSYS - TEST IV**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Annen informasjon:

Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes, og veien til svaret er viktigere enn svaret. Husk derfor å skrive alle steg i beregningene dine. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ **2-sidig** ☒

sort/hvit ☒ **farger** ☐

skal ha flervalgskjema ☐

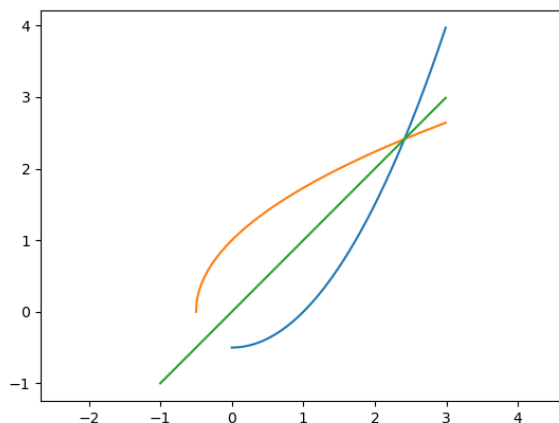
Dato

Sign

Oppgave 1 Siden

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} > 0$$

for $x > -\frac{1}{2}$, er f strengt voksende på hele definisjonsmengden. Derfor eksisterer den inverse funksjonen. En skisse av denne kan man få ved å speile f om $y = x$ eller beregne f^{-1} og tegne den direkte.

**Oppgave 2** Siden

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ og

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

er divergent, gir sammenlikningstesten at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

er divergent. Vi kan også se det ved integraltesten, siden

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Oppgave 3 Anta at både

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

og

$$d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + d_n \mathbf{v}_n = \mathbf{w}$$

Dersom vi trekker disse to likningene fra hverandre, får vi

$$(c_1 - d_1) \mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2) \mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n) \mathbf{v}_n = \mathbf{w} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

og siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige må

$$c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0.$$

Oppgave 4

a) La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Det finnes mange måter å løse matematikkoppgaver på. En helt legitim teknikk går som følger. Gjennom ens voldsomme erfaring og trening ser man at denne matrisen har egenvektorer

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hvis man lurer på om man har gjettest riktig og hva egenverdiene er, er det bare å gange vektorene inn i matrisen og se hva som skjer:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene er altså 4 og 2. Siden egenvektorer til forskjellige egenverdier er lineært uavhengige (i denne matrisen er de til og med ortogonale, mer om dette våren) er A diagonaliserbar, og vi kan trygt sette

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dersom du ikke tror meg, kan du gange sammen $P^{-1}AP$ og se hva som skjer.

b) Nok en gang bare å skrive opp:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 = c_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

men nå må vi i tillegg finne c_1 og c_2 . Det lineære likningssystemet

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

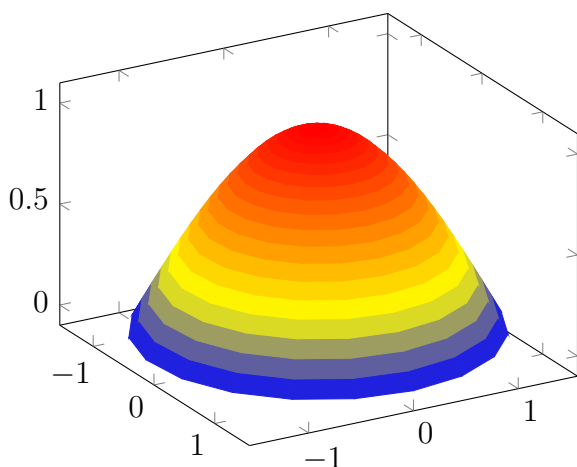
løses av $c_1 = c_2 = 1$, slik at

$$\mathbf{x}(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 5 Vi bruker sylinderskallmetoden, og beregner

$$2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx = 2\pi \left([x \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \right) = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi(\pi - 2).$$

Volumet ser omtrent slik ut:



Oppgave 6

a) Vi skriver

$$0 = 1 - x + \arctan x = f(x).$$

Siden

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 \leq 0$$

for alle x , er f synkende overalt, og kan skjære x -aksen maksimalt en gang. Nå er

$$f(0) = 1$$

og

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

Den siste kan vi se ved at siden $\tan x$ har definisjonsområde $(-\pi/2, \pi/2)$, må $-\pi/2 < \arctan x < \pi/2$. Siden f er deriverbar overalt, vet vi at f er kontinuerlig, og følgelig må f skjære x -aksen for en eller annen $x > 0$.

b) Her er

$$g(x) = 1 + \arctan x,$$

og siden

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1$$

så lenge $x \neq 0$, må fikspunktiterasjonen konvergere så dersom $x_0 \neq 0$. Dersom vi skulle være uheldig å slumpe til med $x_0 = 0$ blir $x_1 = 1$, og da er vi inne i området der $g' < 1$, så det går også fint.

c) Jeg ville gjort det slik, men jeg liker jo golfkode. ITGK snur seg i graven.

```
import numpy as np

x=0 #initialgjetning

for i in range(10):
    x=np.arctan(x)+1
    print x
```

Oppgave 7 Først må vi delbrøksoppspalte. Her er korrekt oppsett:

$$\frac{1}{x^4 - 4x^2} = \frac{1}{x^2(x^2 - 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x+2}$$

Så ganger vi opp med $x^4 - 4x^2$:

$$1 = Ax(x^2 - 4) + B(x^2 - 4) + Cx^2(x + 2) + Dx^2(x - 2)$$

Sammenlikning av ordener i x på begge sider av likningen gir likningssystemet

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

som umiddelbart gir $A = 0$ og $B = -1/4$, slik at vi kan koke ned til

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

som gir $C = -B = 1/16$. Vi kan nå beregne

$$\int \frac{dx}{x^4 - 4x^2} = \int -\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{16(x-2)} - \frac{1}{16(x+2)} = \frac{1}{4x} + \frac{1}{16} \ln|x-2| - \frac{1}{16} \ln|x+2| + C$$

Kommentar: Dette er jo gørrkjedelig, men dessverre relevant for elektroingeniører, fordi man må delbrøksoppspalte systemfunksjonen for å analysere lineære kretser.

Oppgave 8 Vi bruker formelen for arealet til et legeme som fremkommer ved å dreie $y = f(x) \geq 0$ om x -aksen:

$$2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

som gir

$$2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \infty$$

siden $\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} > 1$ på $[1, \infty)$.

Kommentar: Dette er altså Gabriels trompet. Den har endelig volum:

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi.$$

men som vi nå har sett, uendelig overflateareal. Du kan altså bruke den som ølglass eller malingsspann, men hvis du prøver å male den på utsiden, har du laget deg et langvarig prosjekt.