Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Magnus Landstad tlf. 73 59 17 53
Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

Bokmål
Onsdag 25. mai 2005
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 15. juni 2005

Når ikke annet er sagt, skal alle svar begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Finn og klassifiser de kritiske punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x \sin y.$$

Oppgave 2 La T betegne området som det integreres over i trippelintegralet

$$I = \int_0^2 \int_{x^2}^4 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^2 dx \int_{x^2}^4 dy \int_0^y f(x, y, z)\, dz.$$

(Uttrykket til høyre er for dem som har brukt Adams' bok.)

Skissér projeksjonen av T i xy- og yz-planet, og skriv om I slik at integrasjonsrekkefølgen er omvendt av den som er brukt over. Integralet skal altså skrives på formen

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_?^? dz \int_?^? dy \int_?^? f(x, y, z)\, dx$$

der du må finne de riktige integrasjonsgrensene.

Oppgave 3 Finn arbeidet som gjøres av kraftfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + (z-y)\mathbf{k}$$

når en partikkel flyttes fra $(1,0,-1)$ til $(0,-2,3)$ langs en vilkårlig glatt kurve.

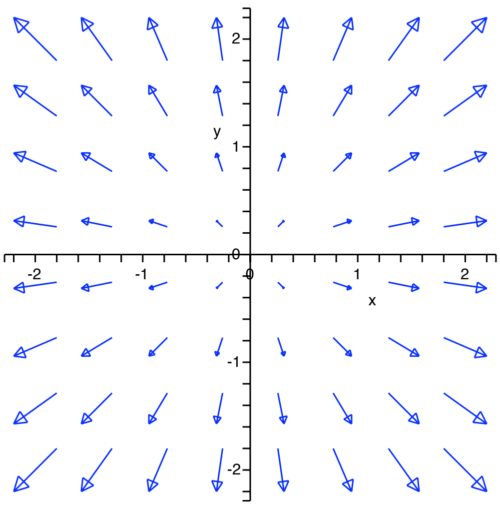
Oppgave 4 To funksjoner er gitt ved

$$f(x,y) = \sin x \cos y \qquad \text{og} \qquad g(x,y) = y^3 - x^2.$$

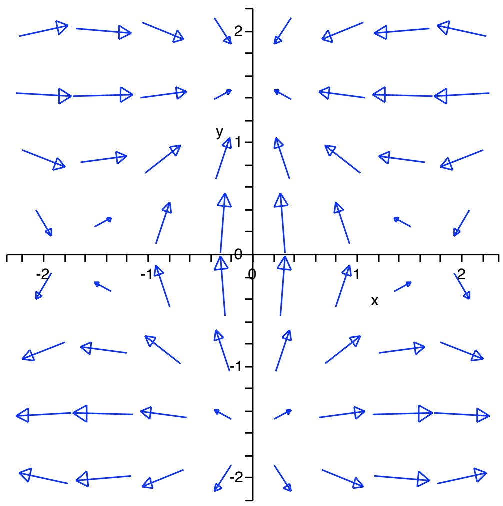
Regn ut gradienten til hver av funksjonene.

Følgende figur viser fire vektorfelter A, B, C og D. Ett (og bare ett) av disse vektorfeltene er gradientfeltet til en av funksjonene gitt over. Hvilket vektorfelt, og hvilken funksjon? Du behøver ikke begrunne svaret.

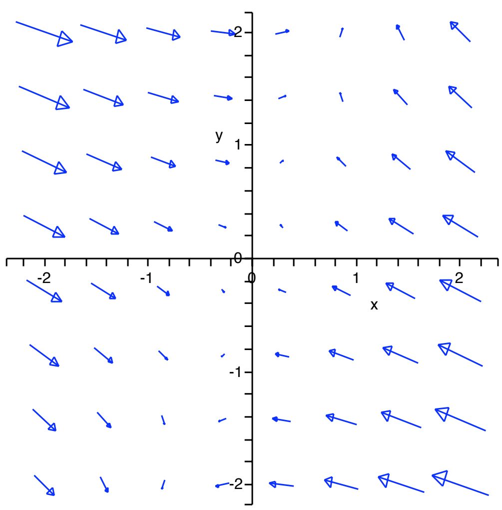
A



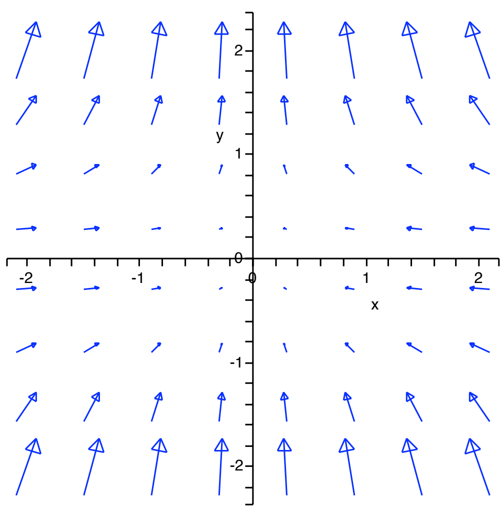
B



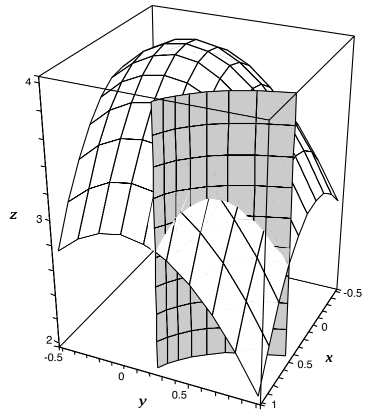
C



D



Oppgave 5 En flate S er gitt ved $z = 4 - x^2 - y^2$.



(a) Finn ligningen for tangentplanet til S i punktet $(1, 1, 2)$.

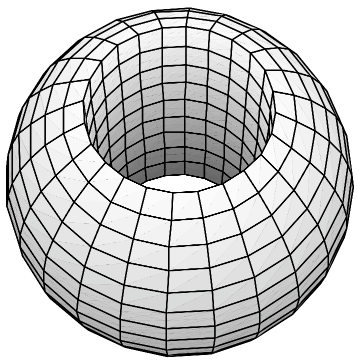
(b) La C være skjæringskurven mellom S og flaten gitt ved

$$4x^2y = 1, \qquad x > 0.$$

Finn det høyeste punktet på C (dvs. det punktet som har størst z-koordinat).

(c) Vi tenker oss at C er en sti i et terreng beskrevet av S. Hvor bratt er stien i det punktet på S som ligger over punktet $(x, y) = \left(1, \frac{1}{4}\right)$? Gi svaret som en vinkel i forhold til horisontalplanet.

Oppgave 6 La T være området avgrenset av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$. Overflaten S av T består av en sylindrisk del, S_1, og en sfærisk del, S_2.



(a) Finn volumet av T ved å regne ut et trippelintegral. (*Hint*: Sylinderkoordinater.)

(b) Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + yz)\mathbf{i} + (y - xz)\mathbf{j} + (z - e^x \sin y)\mathbf{k}$$

er gitt. Regn ut divergensen til $\mathbf{F}$, og finn fluksen

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der enhetsnormalen $\mathbf{n}$ peker ut av T.

(c) Finn verdien av fluksintegralene

$$I_1 = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS \qquad \text{og} \qquad I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

der $\mathbf{n}$ som før peker ut av T. Du kan bruke uten bevis at S_1 er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(u, v) = \cos u\, \mathbf{i} + \sin u\, \mathbf{j} + v\, \mathbf{k} \qquad \text{for } 0 \le u \le 2\pi,\ -\sqrt{3} \le v \le \sqrt{3}.$$

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\;\; B = f_{xy},\;\; C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\, \theta,\, z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\, \varphi,\, \theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$