Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Instituttt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Magnus Landstad (73591753)

EKSAMEN I TMA4105 MATEMATIKK 2

8. august 2005

Bokmål

Tid: 09:00–13:00, Sensur: 29.08.2005

Hjelpemidler (Kode C): Enkel kalkulator (HP 30S), med tilhørende bruksanvisning
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Oppgave 1 Finn en ligning for tangentplanet til flaten $z^2 = x^2+2y^2$ i punktet $P = (1, 2, 3)$. Hvilke andre punkter på flaten har det samme tangentplanet?

Oppgave 2 Finn eventuelle maksima og minima for funksjonen

$$f(x, y) = x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$$

a) når $x^2 + y^2 \leq R^2$

b) og når $-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$.

Argumenter grundig for svarene.

Oppgave 3

a) Finn potensialfunksjonen til det konservative vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2z(x + y)\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + (x^2 + 2xy + z)\,\mathbf{k}$$

b) Bestem kurveintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

der C er kurven som har parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (1 + \sin t)\,\mathbf{i} + \frac{1 - \cos t}{2}\,\mathbf{j} + (2 - \cos 2t)\,\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi.$$

Oppgave 4 La C være kurven gitt ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\,\mathbf{i} + \sqrt{2}t\,\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\,\mathbf{k}, \quad \frac{1}{2} \le t \le 2.$$

a) Finn buelengden av C.

b) Finn enhetstangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ og krumningen av C i $\mathbf{r}(1)$.

Oppgave 5 La T være legemet gitt ved at $x^2 + y^2 \le 1$, $z \ge 0$ og $x^2 + y^2 + z^2 \le 10$.

a) Skisser T. Anta at T har konstant tetthet lik 1, og finn tyngdepunktet.

b) Bestem

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$$

der

$$\mathbf{F} = (-xz - 2y)\,\mathbf{i} + (x^2 - yz)\,\mathbf{j} + (z^2 + 1)\,\mathbf{k}$$

og der C er skjæringskurven mellom sylinderen $x^2 + y^2 = 1$ og kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ $(z > 0)$.

Oppgave 6 Finn arealet av området i $\mathbf{R}^2$ som i polarkoordinater er gitt ved

$$1 + \theta^2 \le \frac{1}{r^2}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

FORMELLISTE

Dekomponering av akselerasjonsvektor:

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\,\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v^2(t)\,\mathbf{N}(t)$$

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \;\; B = f_{xy}, \;\; C = f_{yy}$$

Koordinatsystemer:

Sylinderkoordinater $(r,\, \theta,\, z)$:

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dV = r\,dz\,dr\,d\theta$$

Kulekoordinater $(\rho,\, \varphi,\, \theta)$:

$$x = \rho\,\sin\varphi\,\cos\theta, \quad y = \rho\,\sin\varphi\,\sin\theta, \quad z = \rho\,\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dV = \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

Flateintegral:

$$dS = |\mathbf{N}(u,v)|\,du\,dv = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|\,du\,dv$$

Spesialtilfelle 1: $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \overline{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \overline{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dA$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$

Stokes' teorem: $\displaystyle\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS$