Løsningsforslag eksamen TMA4105 matematikk 2, 25. mai 2005

Oppgave 1 Vi finner de partiellderiverte av første og annen orden av $f(x,y) = x\sin y$:

$$f_x = \sin y, \qquad f_y = x\cos y,$$
$$f_{xx} = 0, \qquad f_{xy} = \cos y, \qquad f_{yy} = -x\sin y.$$

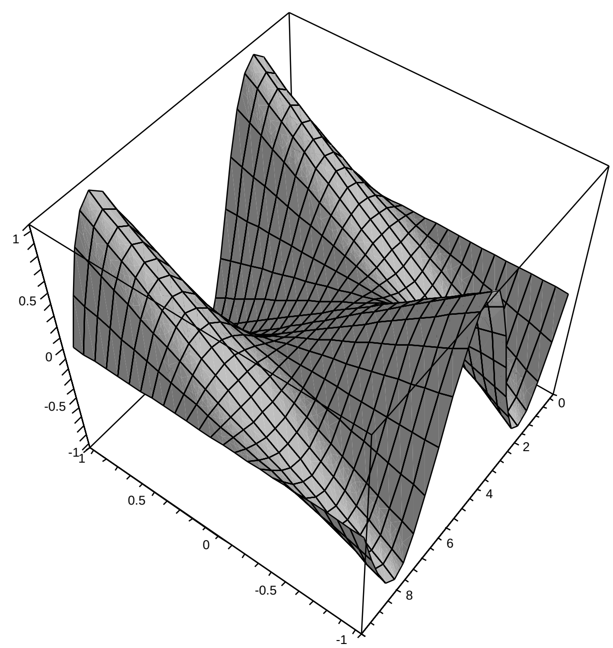
Finner de kritiske punktene ved å løse $f_x = f_y = 0$. $f_x = 0$ gir $\sin y = 0$, dvs. $y = \pi n$ for n heltallig. Derfor er $\cos y = \pm 1 \neq 0$, så $f_y = 0$ gir $x = 0$. De kritiske punktene er altså

$$\underline{\underline{x = 0, \quad y = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.}}$$

Diskriminanten i annenderiverttesten er

$$\Delta(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = -\cos^2 y$$

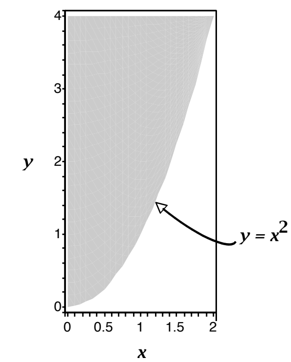
og i de kritiske punktene har denne verdi -1, siden $\cos y = \cos \pi n = \pm 1$ for heltallig n. De kritiske punktene er derfor $\underline{\underline{\text{sadelpunkter}}}$.



Oppgave 2 Området T er beskrevet ved:

$$0 \le x \le 2, \qquad x^2 \le y \le 4, \qquad 0 \le z \le y. \tag{$*$}$$

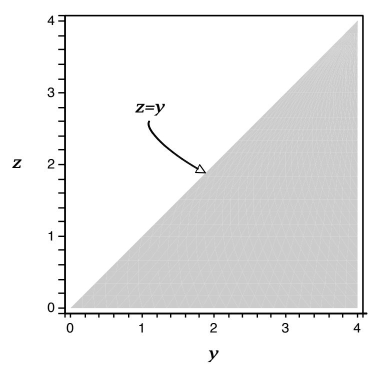
De to første ulikhetene gir oss projeksjonen i xy-planet:



De to siste ulikhetene i $(*)$ beskriver snittet mellom T og et plan $x =$ konst., som er parallelt med yz-planet. Snittet blir størst for verdien $x = 0$, og da har vi

$$0 \le y \le 4, \qquad 0 \le z \le y$$

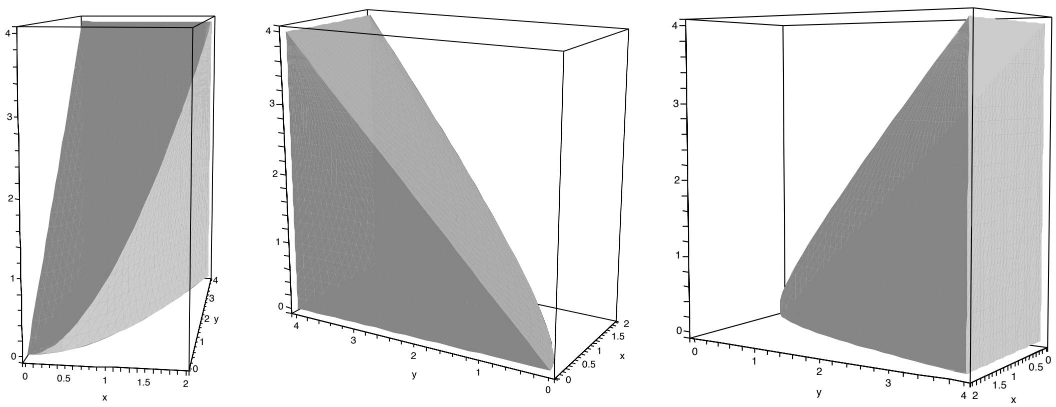
som er projeksjonen av T i yz-planet:



Ut fra disse skissene er det lett å se hva de nye grensene skal være: Vi integrerer først i x fra 0 til $\sqrt{y}$ (ser dette fra den første skissen), deretter i y fra z til 4 (ser dette fra den andre skissen); så integreres z fra 0 til 4. Svaret er altså:

$$\underline{\underline{\int_0^4 \int_z^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}} = \underline{\underline{\int_0^4 dz \int_z^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dx}}$$

Følgende figur viser området T sett fra ulike vinkler.



Oppgave 3 **F** er konservativt: Vi finner at $\mathbf{F} = \nabla f$, der

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(x^2 + z^2\right) + xy - yz.$$

For en hvilken som helst glatt kurve C som starter i $(1, 0, -1)$ og slutter i $(0, -2, 3)$ har vi derfor arbeidet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0, -2, 3) - f(1, 0, -1) = \frac{21}{2} - 1 = \underline{\underline{\frac{19}{2}}}.$$

Oppgave 4 Utregning gir

$$\underline{\underline{\nabla f = \cos x \cos y\, \mathbf{i} - \sin x \sin y\, \mathbf{j}}}, \qquad \underline{\underline{\nabla g = -2x\, \mathbf{i} + 3y^2\, \mathbf{j}}}$$

Figur D viser gradientfeltet til $g(x, y)$.

Oppgave 5 **(a)** Flaten S er gitt ved $z = f(x, y)$ der $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Ligningen for tangentplanet i $(1, 1, 2)$ er gitt ved

$$z = f(1, 1) + (x - 1) f_x(1, 1) + (y - 1) f_y(1, 1)$$

dvs. $z = 2 + (x - 1)(-2) + (y - 1)(-2)$ som forenkles til

$$\underline{\underline{z = 6 - 2x - 2y}}$$

(b) Her er det flere muligheter.

Alternativ 1 Projeksjonen av C i xy-planet er gitt ved $4x^2y = 1$ $(x > 0)$, dvs. $y = \frac{1}{4x^2}$. Dette gir

$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - x^2 - \left(\frac{1}{4x^2}\right)^2 = 4 - x^2 - \frac{1}{16x^4}$$

som skal maksimeres, for $x > 0$. Finner kritisk punkt:

$$\frac{dz}{dx} = -2x + \frac{1}{4x^5} = 0 \iff 8x^6 = 1 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

men vi skal ha $x > 0$, derfor er $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{2}$, og svaret blir

$$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{13}{4}}}.$$

Alternativ 2 Lagrange-multiplikatormetoden. Vi skal maksimere $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ under bibetingelsen $g(x, y) = 0$ der $g(x, y) = 4x^2y - 1$. Dessuten skal $x > 0$. Dette gir ligningene $\nabla f = \lambda \nabla g$ og $g(x, y) = 0$, dvs.

$$-2x = \lambda 8xy, \tag{1}$$
$$-2y = \lambda 4x^2, \tag{2}$$
$$4x^2y = 1, \tag{3}$$

der $x > 0$. Fra (1) får vi $\lambda = -\frac{1}{4y}$, som innsatt i (2) gir $-2y = -\frac{x^2}{y}$, dvs. $x^2 = 2y^2$. Innsatt i (3) gir dette $8y^3 = 1$, dvs. $y = \frac{1}{2}$. (3) gir da $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Resten går som i alternativ 1.

(c) Igjen har vi flere muligheter.

Alternativ 1 La α være vinkelen vi skal bestemme. Stigningstallet $\tan\alpha$ vet vi er lik den retningsderiverte av $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ i punktet $(1, 1/4)$, i retningen bestemt av kurven C. Mer presist,

$$\tan\alpha = D_{\mathbf{u}} f(1, 1/4) = \nabla f(1, 1/4) \cdot \mathbf{u}$$

der $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ skal være tangent til projeksjonen av C i xy-planet, og skal ha lengde 1. Men projeksjonen av C i xy-planet er gitt ved $y = \frac{1}{4x^2}$ for $x > 0$, dvs. vi kan parametrisere den ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{4t^2}\mathbf{j} \qquad (t > 0).$$

Tangentvektoren er

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \frac{1}{2t^3}\,\mathbf{j}.$$

Vi ser på punktet svarende til parameterverdi $t = 1$, og derfor tar vi

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}'(1)}{|\mathbf{r}'(1)|} = \frac{\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}}{\left|\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right).$$

Dette gir oss (siden $\nabla f = -2x\,\mathbf{i} - 2y\,\mathbf{j}$)

$$\tan\alpha = \nabla f(1, 1/4)\cdot\mathbf{u} = \left(-2\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\left(\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{7}{2\sqrt{5}}.$$

Dette gir

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{7}{2\sqrt{5}}\right) \approx -57{,}4$$

grader. Her fikk vi en negativ vinkel, pga. orienteringen av $\mathbf{r}$. Både $\underline{\underline{\alpha \approx 57{,}4}}$ og $\underline{\underline{\alpha \approx -57{,}4}}$ er fullgode svar, siden det kun står "finn vinkelen i forhold til horisontalplanet" i oppgaven.

Alternativ 2 z-verdien svarende til $(x, y) = (1, 1/4)$ er $z = 4 - 1 - (1/4)^2 = 47/16$, så punktet vi ser på er $P = (1, 1/4, 47/16)$.

C er skjæringskurven mellom to flater gitt ved ligninger $F(x, y, z) = 0$ og $G(x, y, z) = 0$, der $F(x, y, z) = z - 4 + x^2 + y^2$ og $G(x, y, z) = 4x^2 y - 1$. En tangentvektor til C i P er derfor

$$\mathbf{T} = \nabla F(P) \times \nabla G(P) = [2, 1/2, 1] \times [2, 4, 0] = [-4, 2, 7].$$

Stigningstallet $\tan\alpha$ er da gitt ved

$$\tan\alpha = \frac{7}{\left|-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right|} = \frac{7}{\sqrt{20}} = \frac{7}{2\sqrt{5}}, \qquad (*)$$

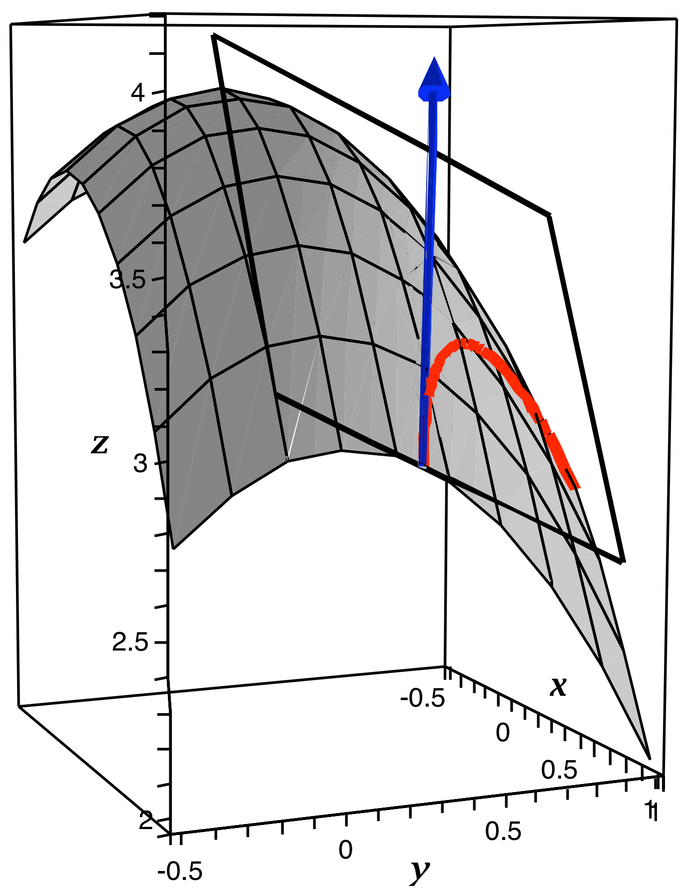
og resten går som i alternativ 1.

Som et alternativ til $(*)$ kan vi resonnere slik: α er vinkelen mellom $\mathbf{T}$ og projeksjonen av $\mathbf{T}$ i xy-planet, som er $-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; derfor er

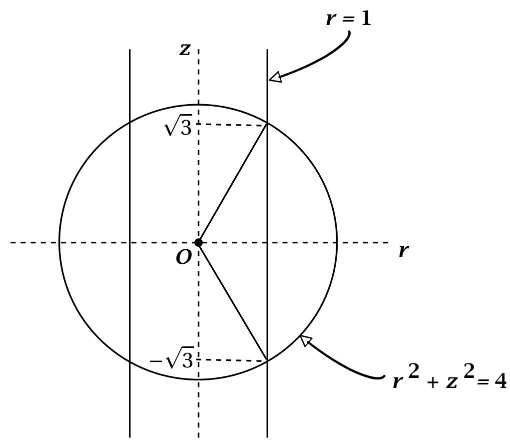
$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{T}\cdot(-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j})}{|\mathbf{T}|\left|-4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right|} = \frac{4^2 + 2^2}{\sqrt{4^2 + 2^2}\sqrt{4^2 + 2^2 + 7^2}} = \sqrt{\frac{20}{69}}$$

som gir $\alpha = \arccos\sqrt{\frac{20}{69}} \approx 57{,}4$.

Følgende figur viser et utsnitt av flaten S med kurven C (i rødt), tangentplanet i punktet P, og tangentvektoren $\mathbf{T}$ (skalert).



Oppgave 6 **(a)** Vi bruker sylinderkoordinater (r, θ, z). Sylinderen $r = 1$ og kuleflaten $r^2 + z^2 = 4$ skjærer hverandre der hvor $1 + z^2 = 4$, dvs. $z = \pm\sqrt{3}$.



I sylinderkoordinater er derfor T beskrevet ved enten

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}, \qquad 1 \le r \le \sqrt{4 - z^2}$$

eller, alternativt,

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 1 \le r \le 2, \qquad -\sqrt{4 - r^2} \le z \le \sqrt{4 - r^2}.$$

Volumet er derfor

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-z^2}} r\,dr\,dz\,d\theta \\
&= 2\pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_1^{\sqrt{4-z^2}} dz \\
&= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (3 - z^2)\,dz \\
&= \pi \left(3z - \frac{1}{3} z^3\right) \Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \pi \left(6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) = \underline{\underline{4\sqrt{3}\pi}}
\end{aligned}$$

eller, alternativt (og enklere),

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= 2\pi \int_1^2 2\sqrt{4-r^2}\,r\,dr \\
&= -2\pi \frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 \\
&= \underline{\underline{4\sqrt{3}\pi}}
\end{aligned}$$

(b) Utregning gir $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3$. Fra divergensteoremet får vi da:

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_T \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_T dV = 3V = \underline{\underline{12\sqrt{3}\pi}}.$$

(c) På S_1 har vi

$$\mathbf{n}\,dS = \pm\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\,du\,dv,$$

der fortegnet må velges slik at retningen er inn mot z-aksen, siden det er angitt i oppgaven at $\mathbf{n}$ skal peke *ut* av T. For å se hva som er det riktige fortegnet, regner vi ut kryssproduktet:

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(-\sin u\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j}\right) \times \mathbf{k} = \cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j}$$

så vi må sette inn et minustegn for å få korrekt orientering. Altså er

$$\mathbf{n}\,dS = -\left(\cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j}\right)\,du\,dv,$$

og vi får (merk at $\mathbf{k}$-komponenten i $\mathbf{F}$ ikke gir noe bidrag)

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos u, \sin u, v)\cdot\left(\cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j}\right)\,du\,dv \\
&= -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \Big((\cos u + v\sin u)\cos u + (\sin u - v\cos u)\sin u\Big)\,du\,dv \\
&= -\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} 1\,du\,dv \\
&= \underline{\underline{-4\sqrt{3}\pi}}.
\end{aligned}$$

Vi trenger faktisk ikke regne ut fluksen gjennom S_2, fordi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = I_1 + I_2 \implies I_2 = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS - I_1 = 12\sqrt{3}\pi + 4\sqrt{3}\pi = \underline{\underline{16\sqrt{3}\pi}}.$$