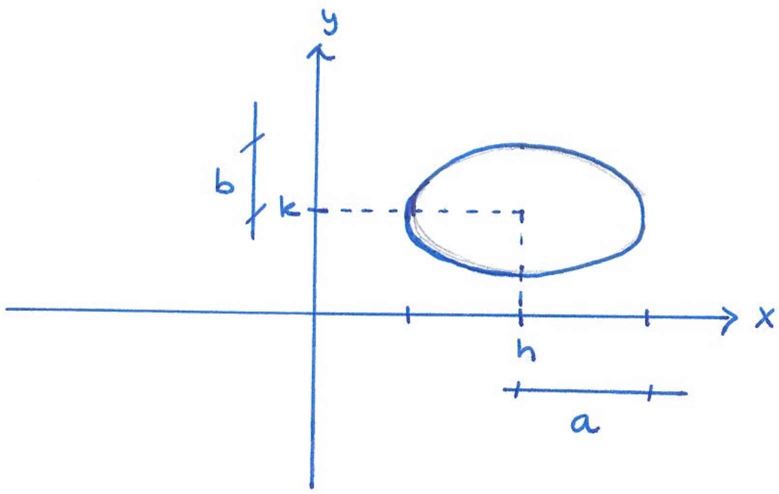
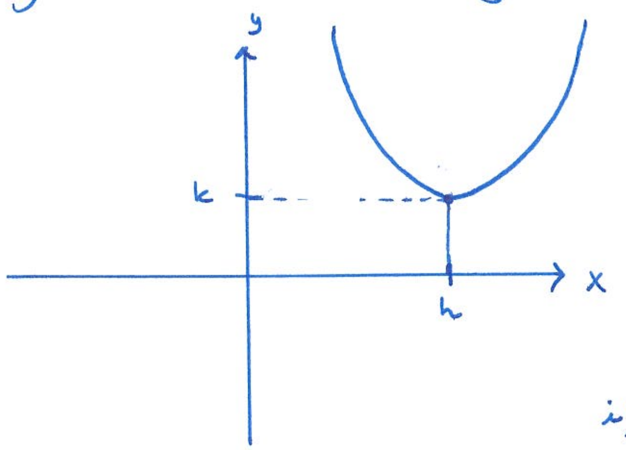
Kjeglesnitt og parametrisering

Ellipse: $$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Sentrum i (h,k) og halvakser a og b.



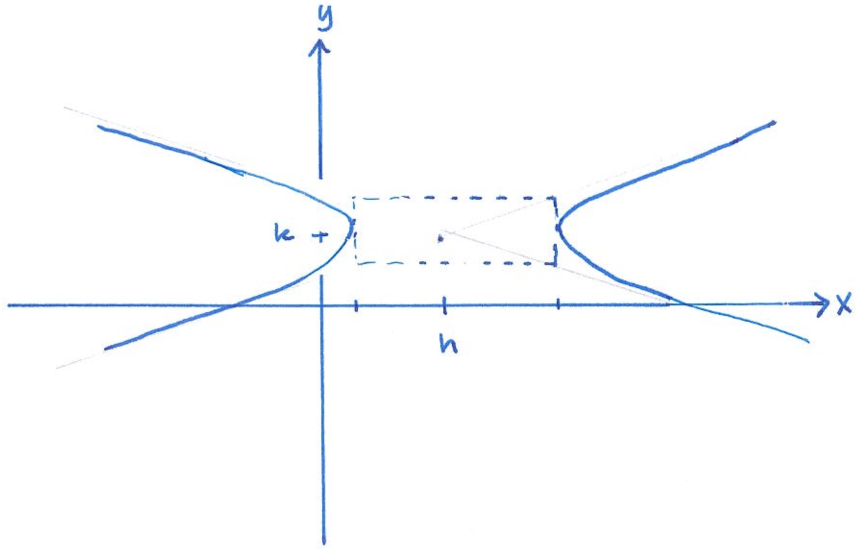
Parabel: i) $y-k = a(x-h)^2$ og ii) $x-h = a(y-k)^2$



i) $a > 0$.

Hyperbel:

i) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ og ii) $\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$



i).

(Oppskrift for tegning s. 420 i hHh.)

Parametrisering

- Ellipse: Siden $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$:

$$\cos t = \frac{x-h}{a}, \quad \sin t = \frac{y-k}{b}$$

$$x = h + a\cos t, \quad y = k + b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

• Parabel : $y-k = a(x-h)^2$

Sett $x = h+t$. Da blir $y = k + at^2$; $-\infty < t < \infty$.

• Hyperbel : Siden $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$:

$$\cosh t = \frac{x-h}{a} \quad , \quad \sinh t = \frac{y-k}{b}$$

$$x = h + a\cosh t \quad , \quad y = k + b\sinh t \quad ; -\infty < t < \infty .$$

P.S. Alle ligninger på formen

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

(bortsett fra få unntak!)

kan skrives om til en av

formene (ellipse, parabel, hyperbel).

De kan derfor også parametriseres.

Eksempel 1

Parametriser $\quad 4x^2 - y^2 + 10y - 21 = 0$.

$$-4x^2 + y^2 - 10y + 21 = 0$$

$$-4x^2 + (y-5)^2 - 25 + 21 = 0$$

$$-4x^2 + (y-5)^2 = 4$$

$$-x^2 + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(y-5)^2}{2^2} - x^2 = 1 \qquad \text{(Hyperbel)}$$

$$\cosh t = \frac{y-5}{2} \qquad \sinh t = x$$

$$\underline{\underline{y = 5 + 2\cosh t \;,\; x = \sinh t}} \quad ; -\infty < t < \infty$$

Kurver i polarkoordinater

Sammenhengen mellom de kartesiske koordinatene (x, y) og polarkoordinatene (r, θ) til et punkt $P \neq$ origo, er gitt ved

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r^2 = x^2 + y^2 .$$

Skissering av polare kurver:

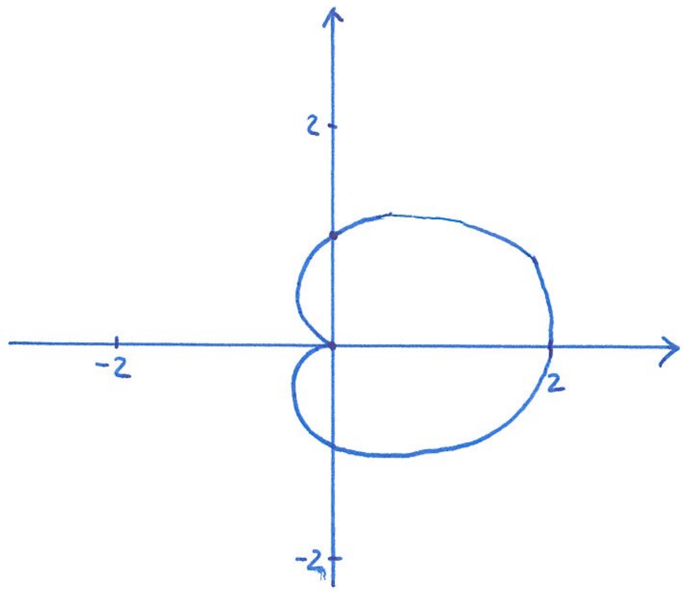
Å lage en tabell med punkter er alltid et godt utgangspunkt.

Eksempel 2

Skisser $r = 1 + \cos\theta$

Tabell:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	2π
r	2	$1+\sqrt{2}/2$	1	$1-\sqrt{2}/2$	0	$1-\sqrt{2}/2$	1	2



$r = 1 + \cos\theta$

Partiell derivasjon

Beskriver, som vi er vant til, endringer.

Partiell derivasjon med hensyn på x gir oss endringen i x-retning.

Analogt for y.

(For andre retninger: retningsderivert)

Eksempel

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- Symmetri
- Blandede partielle deriverte er like dersom de eksisterer og er kontinuerlige.

Gradienten

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \quad \text{hvis} \quad f = f(x,y,z).$$

Kjerneregelen

Eksempel

Finn $z'(t)$ når $z = f(x,y) = x\cos y$, der $[x,y] = [t^2, t^3]$.

1) Ved kjerneregelen:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \cos y \cdot 2t + x\cdot(-\sin y)\cdot 3t^2$$

$$= \underline{2t\cos(t^3) - 3t^4\sin(t^3)}$$

2) Direkte derivasjon:

$$z = t^2\cos(t^3)$$

$$z'(t) = 2t\cos(t^3) + t^2(-\sin(t^3))\cdot 3t^2$$

$$= 2t\cos(t^3) - 3t^4\sin t^3.$$

Retningsderivert

Når vi vil finne ut hvordan endringen er i en bestemt retning :

Setning (10.5.7 i kHk) :

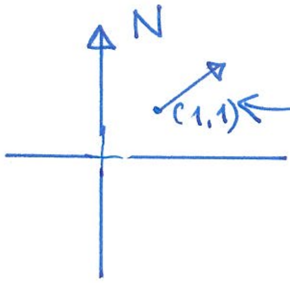
La f være en funksjon av n variable som er kontinuerlig deriverbar i punktet $a \in \mathbb{R}^n$. La u være en enhetsvektor i $\mathbb{R}^n$. Da er den retningsderiverte til f i punktet a og retning u gitt ved

$$D_u f(a) = \nabla f(a) \cdot u$$

J: Finn en enhetsvektor som peker i den retningen du skal, prikk den med gradienten, og vips:
så har du et mål på endringen!

Eksempel

Finn endringen på flaten $f(x,y) = x^2 + 2xy^3$ i nord-østlig retning fra



Enhetsvektor :
Må normalisere
$[1,1]$.
$\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Ↄ: $u = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

$$\nabla f = [2x + 2y^3,\ 6xy^2]$$

$$\nabla f(1,1) = [4, 6]$$

$$\nabla f(1,1) \cdot u = [4,6] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{6}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{10}{\sqrt{2}}}} \left(= \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \right)$$