Lokale max og min

Her følger vi endimensjonalteorien, men ender opp med litt mer enn en ligning.

Setning (10.7.2 i KtlK)

La f være en funksjon av n variable, la $\mathbf{a}$ være et indre punkt i D_f, og anta at $\nabla f(\mathbf{a})$ eksisterer. Hvis $\mathbf{a}$ er et lokalt ekstremalpunkt for f, så er $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

): Finn gradienten, sett lik nullvektoren, og løs ligningene.

Eksempel

Finn ekstremalpunkte(ne) til

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2-2x+2y} \, .$$

$$\nabla f = \left[e^{x^2+y^2-2x+2y} \cdot (2x-2) \, , \, e^{x^2+y^2-2x+2y} \cdot (2y+2) \right]$$

$$= \Phi = [0,0]$$

$$\Rightarrow \quad 2x-2 = 0 \qquad x = 1$$

$$2y+2 = 0 \qquad y = -1$$

Svar: $(1,-1)$.

Men er dette max, min eller kanskje sadelpunkt ?

Andrederivertesten

For enkelhetsskyld, la

$$f_{xx}(a,b) = a$$

$$f_{yy}(a,b) = b$$

$$f_{xy}(a,b) = c$$

Dersom vi har funnet et ekstremalpunkt i (a,b), gjelder:

i) $ab - c^2 > 0$ og $a > 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt min

ii) $ab - c^2 > 0$ og $a < 0 \Rightarrow (a,b)$ lokalt max

iii) $ab - c^2 < 0 \Rightarrow (a,b)$ sadelpunkt.

Eksempel

Finn og klassifiser ekstremalpunktene til $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

For det første: x og y må være $\neq 0$.

Vi starter med å finne punktene:

$$\nabla f = \left[y - \frac{1}{x^2},\ x - \frac{1}{y^2}\right] = [0, 0]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{I} \quad y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \text{II} \quad x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{I} \quad x^2 y - 1 = 0$$

$$\text{II} \quad y^2 x - 1 = 0$$

$$\text{I} - \text{II}: \quad x^2 y - 1 - (y^2 x - 1) = 0$$

$$x^2 y - y^2 x = 0$$

$$xy(x - y) = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x = y$$

Innsatt i I: $x^3 - 1 = 0$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1 = y \qquad (1,1).$$

For å finne ūt om (1,1) er max, min eller sadel, trenger vi flere deriverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} \qquad a = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2}{y^2} \qquad b = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad c = 1$$

$$ab - c^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$$

$$a > 0$$

∴ (1,1) er et lokalt minimum.