Kurveintegral

Setning 11.1.2 (hHh)

La $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ for $a \le t \le b$ være en glatt kurve C, og la f være en kontinuerlig funksjon langs C. Da er

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt .$$

$$\begin{bmatrix} a \le t \le b : & ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt \\ a \ge t \ge b : & ds = -|\mathbf{r}'(t)|\,dt \end{bmatrix}$$

Eksempel 1

Beregn kurveintegralet $\int_C f(x,y,z)\,ds$, der $f(x,y,z) = x+y+z$ og $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \cos t, t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

$$\mathbf{r}'(t) = [\cos t, -\sin t, 1]$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$\int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t + t)\sqrt{2}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[-\cos t + \sin t + \tfrac{1}{2}t^2\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\left(-1 + \tfrac{1}{2}(2\pi)^2 + 1\right)$$

$$= \underline{\underline{2\sqrt{2}\,\pi^2}}$$

Δ

Eksempel 2

Beregn massen til wiren langs kurven $\mathbf{r}(t) = [\cos t, \sin t]$, $0 \le t \le \pi$, når massetettheten er $\delta(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$m = \int_C \delta(x,y)\, ds$$

$$\delta(x,y) = \delta(\cos t, \sin t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|dt = |[-\sin t, \cos t]|dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = dt$$

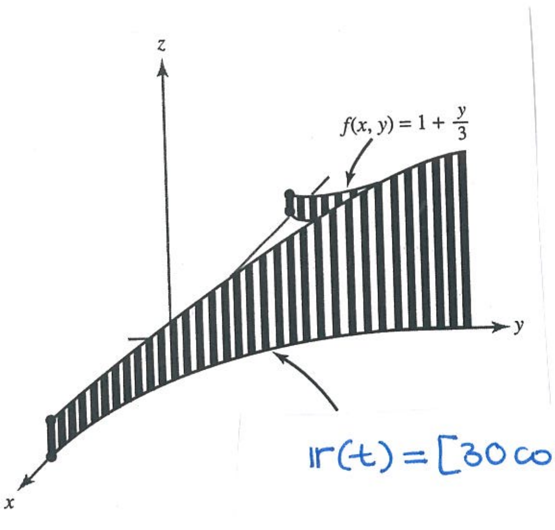
$$m = \int_0^{\pi} 1\, dt = \left[\; t \;\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$

Δ

La oss se på en anvendelse til.

Eksempel 3

Tom Sawyers tante har spurt Tom om å male begge sidene av det gamle gjerdet (se fig.). Tom har estimert at for hver $25 ft^2$ noen maler for han, vil det villige offeret betale 5 cent. Hvor mye kan Tom tjene, forutsatt at tanten gir han malingen gratis?



$\mathbf{r}(t) = [30\cos^3 t, 30\sin^3 t]$

Gjerdet er altså satt opp langs $\mathbf{r}(t)$, og har høyde $f(x,y)$. Siden det er symmetrisk om y-aksen, greier vi oss med å regne ut arealet i første kvadrant. Så multipliserer vi med 4 (2 for å få med hele lengden, 2 for å få med begge sider).

$$A = \int_C f(x,y)\,ds$$

$$f(x,y) = f(30\cos^3 t, 30\sin^3 t) = 1 + \frac{30\sin^3 t}{3}$$

$$= \underline{1 + 10\sin^3 t}$$

$$ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \left|\left[30(3\cos^2 t)(-\sin t), 30(3\sin^2 t)(\cos t)\right]\right| dt$$

$$= \left|\left[-90\cos^2 t\sin t, 90\sin^2 t\cos t\right]\right| dt$$

$$= \sqrt{90^2\cos^4 t\sin^2 t + 90^2\sin^4 t\cos^2 t}\;dt$$

$$= \sqrt{90^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\;dt$$

$$= \underline{90\cos t\sin t\;dt} \quad ; \quad t \in [0, \pi/2].$$

$$A = \int_C f(x,y)\,ds = \int_0^{\pi/2} (1 + 10\sin^3 t)\,90\cos t\sin t\,dt$$

$$= 90\int_0^{\pi/2} (\sin t + 10\sin^4 t)\cos t\,dt$$

cos t er den deriverte av sin t, så :

$$u = \sin t$$

$$du = \cos t\,dt$$

$$A = 90\int_0^1 (u + 10u^4)\,du$$

$$= 90\left[\tfrac{1}{2}u^2 + 2u^5\right]_0^1 = 90\left(\tfrac{1}{2}+2\right) = 90\cdot\tfrac{5}{2} = \underline{225}$$

Dette er altså 1/4 av arealet, så det totale arealet blir $900 ft^2$.

Tom får 5 cent for hver $25 ft^2$ hans offer maler, atså:

$$\frac{900}{25}\cdot 5 = 180.$$

Så Tom tjener 180 cent, eller $\underline{\underline{1{,}8 \text{ dollar}}}$

Δ

Dobbelintegral

Dobbelintegral over rektangler:

Setning 11.3.1 (LHL)

La $f(x,y)$ være kontinuerlig på rektanglet $R=[a,b]\times[c,d]$. Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy .$$

Eksempel 4

Beregn $\iint_R (x^2+y)\,dA$, der $R=[0,1]\times[0,1]$.

Alternativ 1:

$$\int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{3}x^3 + xy\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\tfrac{1}{3}+y\right) dy$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Setning 11.3.1 sier at vi kan integrere i motsatt rekkefølge, og at dette skal gi samme svar:

Alternativ 2:

$$\int_0^1\int_0^1 (x^2+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2y+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

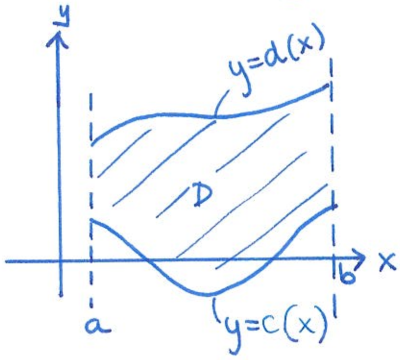
$$= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Her har ikke rekkefølgen stort å si, men vi skal se at den i senere tilfeller spiller en helt avgjørende rolle!

Itererte integral over mer generelle områder

Setning 11.3.3 (hHL)

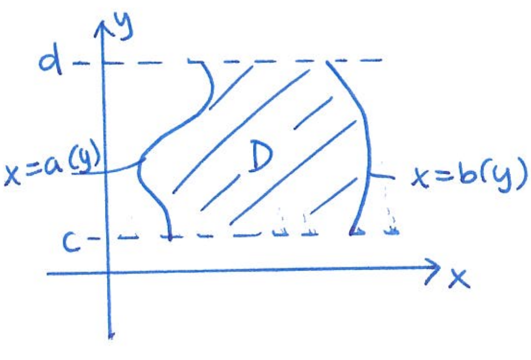
La f være kontinuerlig på et lukket, begrenset område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dersom D er gitt ved $D: c(x) \leq y \leq d(x)$ for $a \leq x \leq b$



der c og d er stykkevis kontinuerlige på $[a,b]$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy\,dx .$$

Dersom D er gitt ved $D: a(y) \leq x \leq b(y)$ for $c \leq y \leq d$,



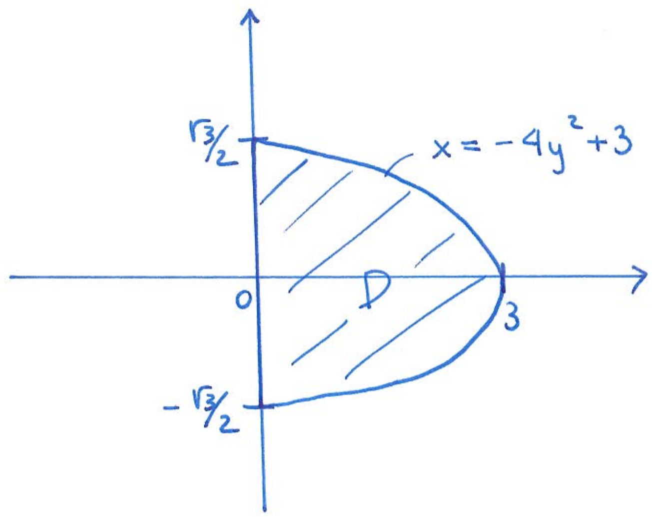
der a og b er stykkevis kontinuerlige på $[c,d]$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\,dy .$$

Vi trenger <u>ikke</u> å pugge disse to resultatene! Nøkkelen er å <u>tegne</u>. La oss skje hva som skjer i et par konkrete eksempler:

<u>Eksempel 5</u>

La D være området begrenset av y-aksen og $x = -4y^2 + 3$. Beregn $\iint_D x^3 y \, dx \, dy$.



$x=-4y^2+3$ skjærer y-aksen når $x = 0$:

$$0 = -4y^2 + 3$$
$$4y^2 = 3$$
$$y^2 = \frac{3}{4}$$
$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Siden vi skal beregne $\iint_D x^3 y\,dx\,dy$,

betyr det at vi først skal integrere m.h.p. x. Grensene for x skal da uttrykkes som funksjoner av y.

Vi ser at for en vannrett linje parallell med x-aksen, går området fra $x = 0$ til $x = -4y^2 + 3$.

Grensene for y skal uttrykkes som konstanter, fra $y = -\sqrt{3}/2$ til $y = \sqrt{3}/2$.

Derfor:

$$I = \iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \int_0^{-4y^2+3} x^3 y\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left[\frac{1}{4} x^4 y\right]_{x=0}^{-4y^2+3} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{4}\left(-4y^2+3\right)^4 y\,dy$$

Kan multiplisere ut integranden, men en substitusjon gir oss en enklere jobb