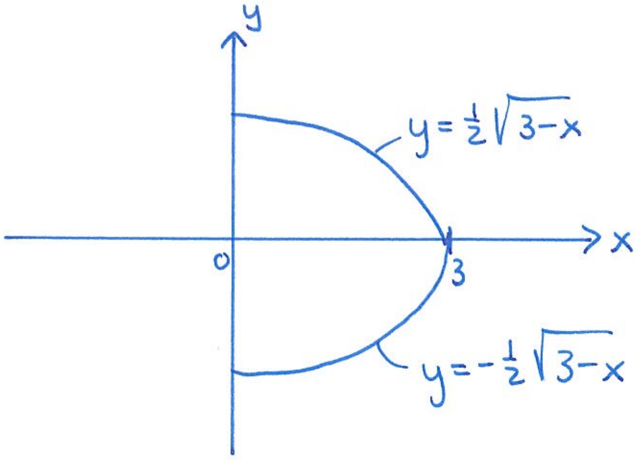
$$u = -4y^2 + 3$$

$$du = -12y\,dy$$

$$-\tfrac{1}{12}du = y\,dy$$

$$I = \frac{1}{4}\int_0^0 u^4 \left(-\tfrac{1}{12}du\right) = \underline{\underline{0}}$$

Kan vi integrere den andre veien?



$$x = -4y^2 + 3$$

$$4y^2 = 3 - x$$

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3-x}$$

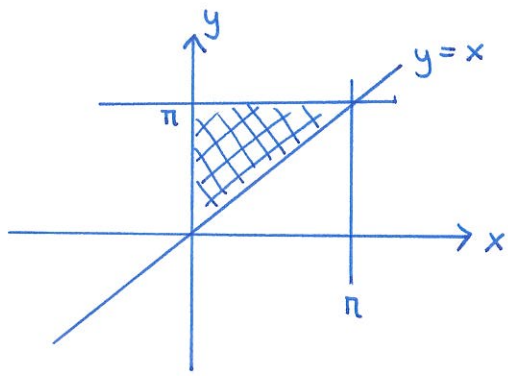
Da skal vi altså integrere m.h.p. y først, og en horisontal linje parallell med y-aksen går fra $-\frac{1}{2}\sqrt{3-x}$ til $\frac{1}{2}\sqrt{3-x}$. x må gå fra 0 til 3. Altså;

$$I = \int_0^3 \int_{-\frac{1}{2}\sqrt{3-x}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3-x}} x^3 y\,dy\,dx = \quad \dots \quad 0\,?$$

Noen ganger kan vi integrere i den rekkefølgen vi ønsker, andre ganger <u>må</u> vi endre rekkefølgen ....

Eksempel 6

Beregn $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.



$$\int_0^{\pi}\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{\sin y}{y}\,x\right]_{x=0}^{y} dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin y}{y}\cdot y\right) dy$$

$$= \int_0^{\pi} \sin y\,dy$$

$$= \Big[-\cos y\Big]_0^{\pi} = -(-1)+1 = \underline{\underline{2}}$$

Δ

Et lite tips til slutt:

Dersom vi integrerer over et rektangel $[a,b]\times[c,d]$, og integranden $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$, kan vi dele opp integralet:

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_a^b\int_c^d g(x)\cdot h(y)\,dy\,dx$$

$$=\int_a^b g(x)\,dx\cdot\int_c^d h(y)\,dy\,.$$

Dobbelintegral i polarkoordinater

Setning 11.5.1

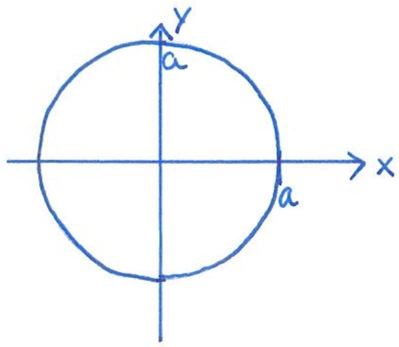
La f være kontinuerlig på det polare rektanglet R der $0 \le a \le r \le b$ og $\alpha \le \theta \le \beta$. Da er

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\theta\, dr$$

$$= \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta \, .$$

Eksempel 7

Beregn $\iint_D xy\,dA$, der D er sirkelen $x^2+y^2 \le a^2$.



Må integrere r fra 0 til a, og
θ fra 0 til 2π (rundt hele sirkelen).

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\cos\theta\, r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\theta\sin\theta\,d\theta \int_0^{a} r^3\,dr$$

$u = \sin\theta$
$du = \cos\theta\,d\theta$

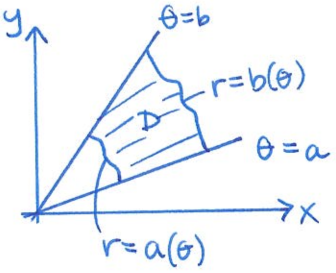
$$= \int_0^{0} u\,du \int_0^{a} r^3\,dr = \underline{\underline{0}}.$$

Dersom integranden inneholder mange uttrykk av typen "x^2+y^2", eller integrasjonsområdet er en sirkel (eller halvsirkel eller lignende), er polarkoordinater ofte et nyttig verktøy.

Dersom vi vil bruke polarkoordinater på andre områder enn polare rektangel, er følgende til hjelp:

Setning 11.5.4

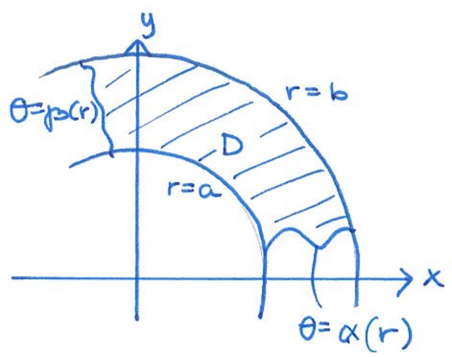
La $f(x,y)$ være kontinuerlig over området D. Dersom D er gitt ved



der $a(\theta) \geq 0$ og a og b er kontinuerlige på $[\alpha, \beta]$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{a(\theta)}^{b(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta .$$

Dersom D er gitt ved

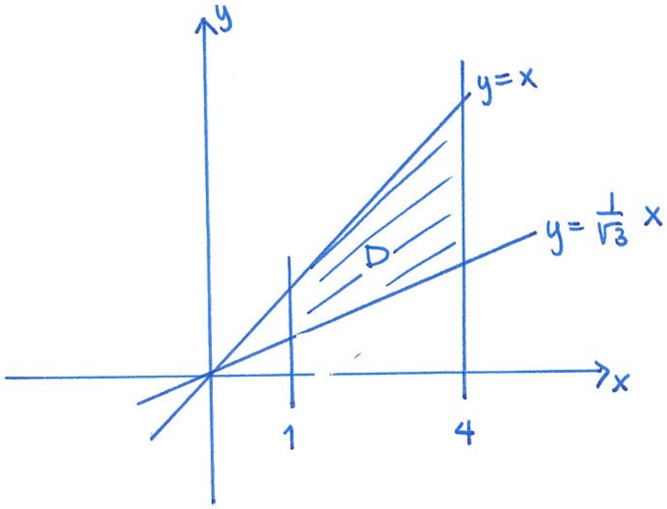


og α og β er kontinuerlige på $[a,b]$, så er

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,d\theta\,dr .$$

Eksempel 8

Beregn $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA$, når D er området begrenset av $y = x$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $x = 1$ og $x = 4$.



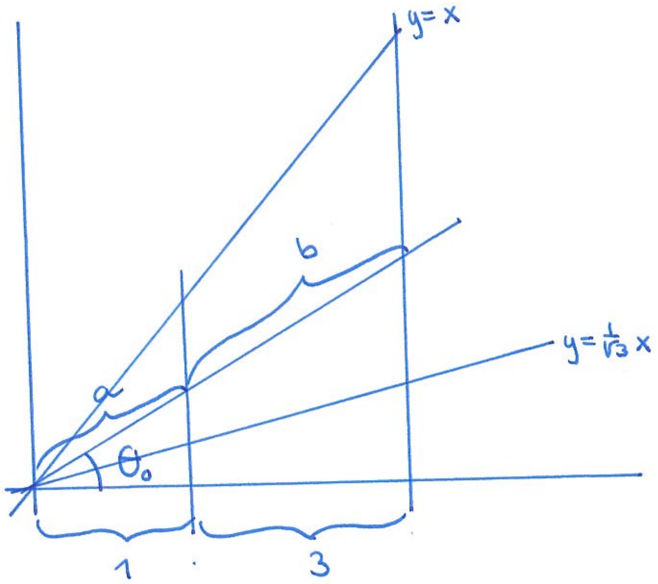
Her er ikke området problematisk, men den antideriverte til integranden dukker ikke opp av seg selv (men den fins ....)

La oss prøve på et polarkoordinat-skifte:

Siden området ligner på det første alternativet i forrige setning, forsøker vi å uttrykke grensene for

r v.h.a. θ :

"Trikset" er å se hvordan r varierer med θ. Da fikserer vi en θ :



$$\cos\theta_0 = \frac{1}{a}$$

$a = \frac{1}{\cos\theta_0}$ som blir nedre grense for r.

$$\cos\theta_0 = \frac{4}{a+b}$$

$a+b = \frac{4}{\cos\theta_0}$ som blir øvre grense for r.

Grenser for θ :

$$\theta_{nedre} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6$$

$$\theta_{øvre} = \arctan 1 = \pi/4$$

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dA = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta}} \frac{1}{\sqrt{r^2}}\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \Big[r \Big]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{4}{\cos\theta}} d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left(\frac{4}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\theta} \right) d\theta$$

$$= 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos\theta} = 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 3\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1-\sin^2\theta}$$

(Substitusjon : $u = \sin\theta$
$du = \cos\theta\, d\theta$)

$$= 3\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{1-u^2}$$

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A+Au+B-Bu}{1-u^2}$$

$$A - B = 0$$

$$A + B = 1$$

$$A = B = 1/2$$

$$3\int_{1/2}^{\sqrt{2}/2}\left(\frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\right)du = \frac{3}{2}\Big[-\ln|1-u| + \ln|1+u|\Big]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_{1/2}^{\sqrt{2}/2}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\ln\frac{1+\sqrt{2}/2}{1-\sqrt{2}/2} - \ln\frac{1+1/2}{1-1/2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \ln\frac{2+1}{2-1}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} - \ln 3\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}{3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{3(2-\sqrt{2})}}}$$

Δ