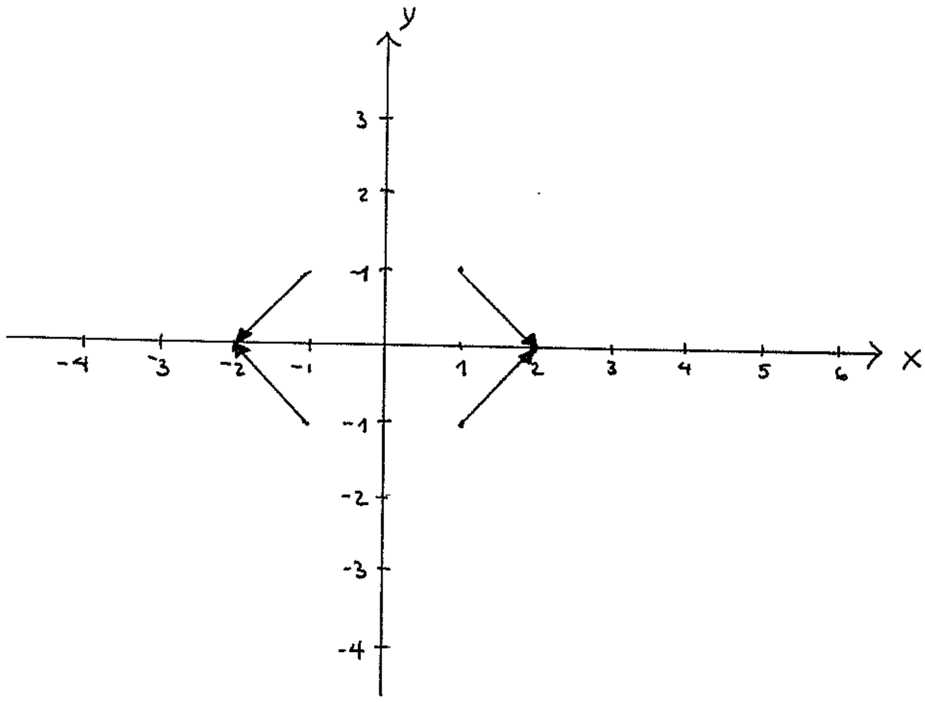
Vektorfelt

Vektorfelt i planet :

$$\mathbb{F}(x,y) = F_1(x,y)\,\mathbb{i} + F_2(x,y)\,\mathbb{j} \qquad ;(x,y)\in D_{\mathbb{F}} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Eksempel 1

Illustrer vektorfeltet $\mathbb{F}(x,y) = [x,-y]$.



$(2,2)$: $[2,-2]$

Arbeid i kraftfelt

arbeid = kraft · vei

Dersom kraftfeltet $\mathbb{F}$ bidrar til å flytte en enhetspartikkel langs en kurve C, kan vi uttrykke arbeidet slik:

Definisjon

La C være en orientert kurve gjennom et kraftfelt $\mathbb{F}$ i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Vi sier at kurveintegralet

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T} \, ds$$

er arbeidet i $\mathbb{F}$ langs C (dersom integralet eksisterer).

$\mathbb{T}$ er en enhetstangentvektor.

Hvordan regner vi med dette?

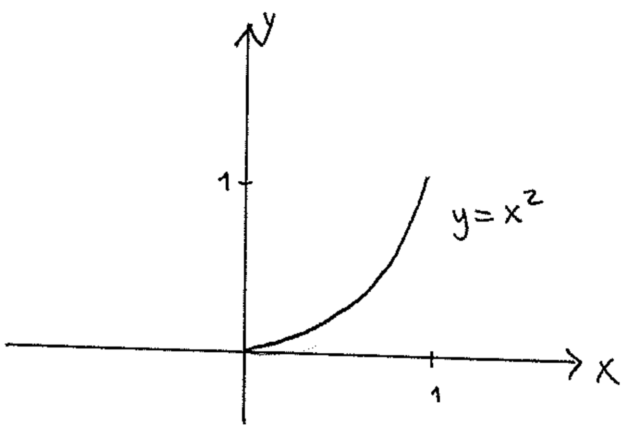
Setning (12.1.9 i Lth)

La $\mathbb{F}$ være et kontinuerlig vektorfelt i et åpent område D i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. La C være en glatt kurve i D gitt ved $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ for $\alpha \le t \le \beta$. Da er

$$W = \int_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}\, ds = \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\, \mathbb{r}'(t)\, dt .$$

Eksempel 2

Finn arbeidet $\int_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}\, ds$ i $\mathbb{F}$ langs C, når $\mathbb{F} = [x, y^2]$ og C er mengden punkter (x, y) slik at $y = x^2$ og $x \in [0, 1]$, orientert i retning av økende x.



Parametrisering : $\mathbf{r}(t) = [t, t^2]$

$0 \leq t \leq 1.$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [t, (t^2)^2] = [t, t^4]$$

$$\mathbf{r}'(t) = [1, 2t]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = [t, t^4] \cdot [1, 2t]$$

$$= t + 2t^5 .$$

$$W = \int_0^1 (t + 2t^5)\,dt = \left[\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^6\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

Eksempel 3

Det elektriske feltet $\mathbf{F}(x, y, z)$ rundt en uendelig lang, uniformt ladet leder langs x-aksen er gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = k \, \frac{y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{y^2 + z^2} \,,$$ der k er en konstant.

Beregn $\int_C \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds$ når C er helixen

$\mathbb{r}(x,y,z) = [t, a\cos t, a\sin t]$ for $0 \le t \le 2\pi$.

Vi vet at $$\omega = \int_C \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds = \int_\alpha^\beta \mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\,\mathbb{r}'(t)\,dt.$$

$$\mathbb{F}(x,y,z) = k\left[0, \frac{y}{y^2+z^2}, \frac{z}{y^2+z^2}\right]$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t)) = k\left[0, \frac{a\cos t}{a^2}, \frac{a\sin t}{a^2}\right]$$

$$= k\left[0, \frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{a}\right]$$

(siden $a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$)

$$\mathbb{r}'(t) = [1, -a\sin t, a\cos t]$$

$$\mathbb{F}(\mathbb{r}(t))\cdot\mathbb{r}'(t) = k\left[0, \frac{\cos t}{a}, \frac{\sin t}{a}\right]\cdot[1, -a\sin t, a\cos t]$$

$$= k\left(0 - \cos t\sin t + \sin t\cos t\right) = 0.$$

Altså $\int_C \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds = \underline{\underline{0.}}$

Gradientfelt og potensialfunksjon

La $\mathbb{F}(x,y,z)$ være et vektorfelt.

Dersom $\mathbb{F}(x,y,z) = \nabla f(x,y,z)$, dvs. vektorfeltet kan skrives som gradienten til en funksjon, kalles $\mathbb{F}$ et <u>gradientfelt</u> og f kalles en <u>potensialfunksjon</u>.

Eksempel 4

Finn potensialfunksjonen til

$$\mathbb{F}(x,y,z) = [\cos x \cos y, -\sin x \sin y, 1].$$

$$f_x = \cos x \cos y \Rightarrow f = \sin x \cos y + h_1(y,z)$$

$$f_y = -\sin x \sin y \Rightarrow f = \sin x \cos y + h_2(x,z)$$

$$f_z = 1 \Rightarrow f = z + h_3(x,y)$$

$$\underline{\underline{f = \sin x \cos y + z + K.}}$$

Arbeid i gradientfelt

Setning (12.2.4 i LHL)

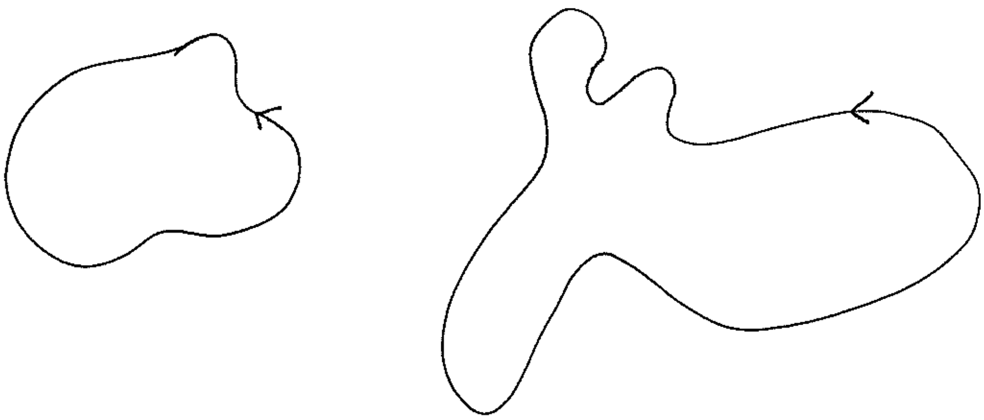
La $\mathbb{F}(x,y)$ være et kontinuerlig gradientfelt med potensialfunksjon f i et åpent område D i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. La C være en stykkevis glatt kurve i D som går fra $\mathbb{a} \in D$ til $\mathbb{b} \in D$, og la $\mathbb{T}$ være enhetstangentvektor til C.

Da er

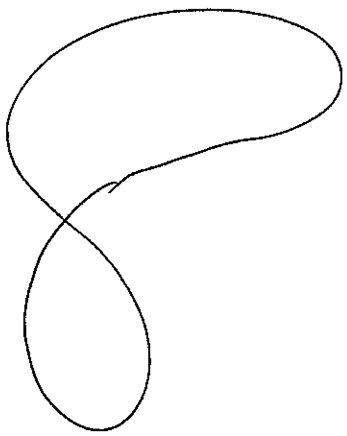
$$\int_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T} \, ds = f(\mathbb{b}) - f(\mathbb{a}) .$$

Greens teorem

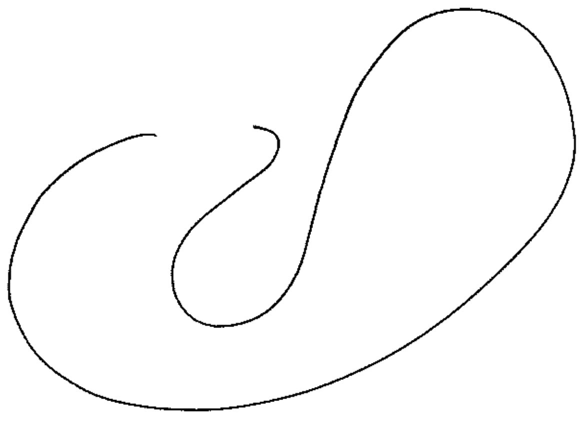
Positiv omløpsretning: - en enkel, lukket kurve orientert mot klokka.



Enkle, lukkede kurver.



Lukket, men ikke enkel



Åpen

Greens teorem

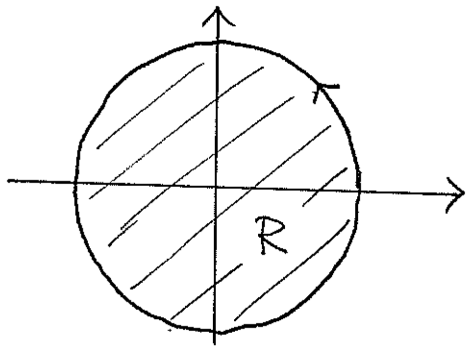
La $F_1(x,y)$ og $F_2(x,y)$ være to kontinuerlige deriverbare funksjoner i et åpent område $D \subseteq \mathbb{R}^2$. La C være en stykkevis glatt, enkel, lukket kurve med positiv omløpsretning, slik at det lukkede området R på og innenfor C ligger i D. Da er

$$\oint_C F_1\,dx + F_2\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

$$\left(\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint F_1\,dx + F_2\,dy \right)$$

Eksempel 5

La C være sirkelen $x^2+y^2=4$ i positiv omløpsretning. Beregn $\oint \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds$ når $\mathbb{F}(x,y) = -y\,\mathbb{i} + x\,\mathbb{j}$.



$$\oint \mathbb{F}\cdot\mathbb{T}\,ds = \iint_R (1-(-1))\,dA$$

$$= 2\iint_R dA = 2\cdot(\text{arealet av } R)$$

$$= 2\cdot\pi\cdot 2^2 = \underline{\underline{8\pi}}$$