Areal ved Greens teorem

Setning (12.3.8 i hHh)

La C være en stykkevis glatt, enkel, lukket kurve med positiv omløpsretning i planet. Da er arealet av området som C omslutter gitt ved

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

Eksempel

Finn arealet innenfor ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Parametriserer ved

$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$dy = b\cos t\,dt$$

$$A = \int_0^{2\pi} x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{ab}{2}\left[t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{ab}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi ab}}$$

Eksempel

Bruk Greens teorem til å vise at arealet av en sirkelskive med radius R er πR^2.

Parametriserer sirkelen:

$$\mathbb{r}(t) = [R\cos t, R\sin t]$$

$$A = \int_0^{2\pi} R\cos t \cdot R\cos t \, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \underline{\underline{\pi R^2}}$$