Stokes teorem

Definisjon

Vektoren $\text{curl}\,\mathbb{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbb{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbb{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbb{k}$

er cürlen til vektorfeltet $\mathbb{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\,\mathbb{i} + F_2(x,y,z)\,\mathbb{j} + F_3(x,y,z)\,\mathbb{k}$ når de partielle deriverte eksisterer.

Eksempel

Beregn curl $\mathbb{F}$ til $\mathbb{F}(x,y,z) = [x^3y, y+z^2, xyz]$

$$\text{curl}\,\mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3y & y+z^2 & xyz \end{vmatrix}$$

$$= [xz - 2z,\ 0 - yz,\ 0 - x^3]$$

$$= \underline{\underline{[xz-2z, -yz, -x^3]}}$$

Stokes teorem

La $\mathbb{F}(x,y,z)$ være et vektorfelt med kontinuerlige partielle deriverte i et åpent område $D \subseteq \mathbb{R}^3$. La S være en stykkevis glatt, orientert flate i D med enhetsnormal $\mathbb{n}$, der randen $C \subseteq S$ er en enkel, lukket, stykkevis glatt kurve med enhetstangent $\mathbb{T}$, positivt orientert i forhold til S. Da er

$$\oint_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}\, ds = \iint_S (\mathrm{curl}\, \mathbb{F}) \cdot \mathbb{n}\, dS .$$

Eksempel

Bruk Stokes' teorem til å finne arbeidet $W = \int_C \mathbb{F} \cdot \mathbb{T}\, ds$

hvor C er snittet mellom paraboloiden $z = 4x^2 + 9y^2$ og planet $8x - 6y - z + 4 = 0$, orientert mot klokken sett ovenfra, og $\mathbb{F}(x,y,z) = [y, z^2, 2yz + x - y]$.

$$\text{curl } \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z^2 & 2yz+x-y \end{vmatrix}$$

$$= [2z-1-2z, 0-1, 0-1]$$

$$= -[1,1,1].$$

Kurven C: Skjæringen mellom

$z = 8x - 6y + 4$ og $z = 4x^2 + 9y^2$ gir

$$8x - 6y + 4 = 4x^2 + 9y^2$$

Kjeglesnitt, og ordning av uttrykket gir

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{1}{3}\right)^2}{1^2} = 1 \qquad \text{Ellipse.}$$

Dersom vi setter R til området

innenfor ellipsen, vil arealet av R

være $\pi ab = \pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3\pi}{2}$.

Lar S være den delen av planet $z = 8x - 6y + 4$ som ligger innenfor C.

Parametrisering av S:

$$[x, y, 8x - 6y + 4] \quad ; \quad (x, y) \in R.$$

Normalvektor:

$$\mathbb{N} = u_x \times u_y = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = [-8, 6, 1]$$

Lengde: $\sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{101}$, så

enhetsnormal: $\mathbb{n} = \frac{1}{\sqrt{101}}[-8, 6, 1]$.

$$\text{curl } \mathbb{F} \cdot \mathbb{n} = -[1, 1, 1] \cdot \frac{1}{\sqrt{101}}[-8, 6, 1]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{101}}(-8 + 6 + 1) = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{101}}\, dS$$

$$= \frac{1}{\sqrt{101}} \iint_S dS$$

projeksjonen av S i xy-planet (som gir R).

$$= \frac{1}{\sqrt{101}} \iint_R |\mathbf{N}|\, dA$$

$$= \frac{1}{\sqrt{101}} \iint_R \sqrt{101}\, dA$$

$$= (\text{arealet av } R) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{2}}}$$