VEKTORER OG PARAMETRISERTE KURVER

— Kap. 8 (LHL).

La oss starte med en viktig setning:

- La $\mathbb{a}$ og $\mathbb{b}$ være to vektorer fra $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$, og la θ være vinkelen mellom dem, $0 \leq \theta \leq \pi$. Da er

$$\mathbb{a} \cdot \mathbb{b} = |\mathbb{a}| \cdot |\mathbb{b}| \cos \theta .$$

To definisjoner:

- to vektorer $\mathbb{v}$ og $\mathbb{b}$ er parallelle dersom $\exists$ en konstant $c \in \mathbb{R}$ s.a. enten $\mathbb{v} = c\mathbb{b}$ eller $\mathbb{b} = c\mathbb{v}$.
  Vi skriver da $\mathbb{v} \parallel \mathbb{b}$.

- to vektorer $\mathbb{v}$ og $\mathbb{b}$ er ortogonale dersom $\mathbb{v} \cdot \mathbb{b} = 0$.
  Vi skriver $\mathbb{v} \perp \mathbb{b}$.

Dekomponering

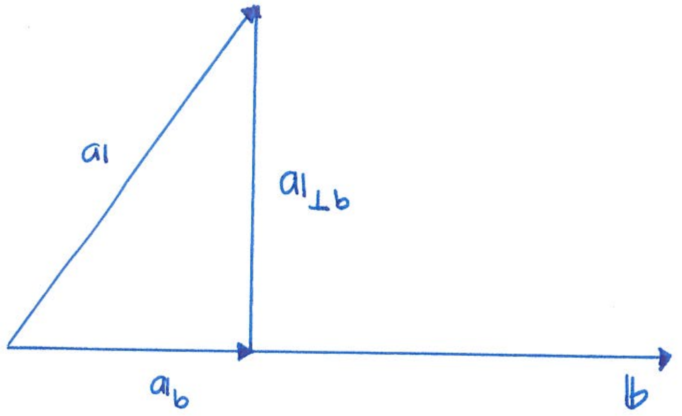
Definisjon: La $\mathbb{a}$ og $\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Vi sier at $\mathbb{a}$ er dekomponert i forhold til $\mathbb{b}$ dersom vi har funnet to vektorer $\mathbb{a}_b \parallel \mathbb{b}$ og $\mathbb{a}_{\perp b} \perp \mathbb{b}$ s.a.

$$\mathbb{a} = \mathbb{a}_b + \mathbb{a}_{\perp b}.$$

Hvorfor?

Hvordan ser dette ut?

Hvordan gjør vi det?



Oppskrift :

La $\mathbb{a}$ og $\mathbb{b} \neq \mathbb{0}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Da er

$$\mathbb{a} = a_b \mathbb{u} + \mathbb{a}_{\perp b}$$

der

$$\mathbb{u} = \frac{\mathbb{b}}{|\mathbb{b}|}, \quad a_b = \mathbb{a} \cdot \mathbb{u}, \quad \mathbb{a}_{\perp b} = (\mathbb{a} - a_b \mathbb{u}) \perp \mathbb{b}.$$

Eksempel 1 Dekomponer $\mathbb{a}$ i forhold til $\mathbb{b}$.

$$\mathbb{a} = \mathbb{i} - \mathbb{j} + \mathbb{k}, \quad \mathbb{b} = \mathbb{i} + \mathbb{j} + \mathbb{k}$$

$$\mathbb{a} = [1, -1, 1], \quad \mathbb{b} = [1, 1, 1]$$

1) Finner $\mathbb{u}$:

$$|\mathbb{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbb{u} = \frac{\mathbb{b}}{|\mathbb{b}|} = \frac{[1, 1, 1]}{\sqrt{3}} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

2) $a_b = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = [1, -1, 1] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Så $\mathbf{a}_b = a_b \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$$= \underline{\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]}.$$

3) $\mathbf{a}_{\perp b} = \mathbf{a} - a_b \mathbf{u}$

$$= [1, -1, 1] - \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$$

$$= \underline{\left[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]}$$

Altså : $\mathbf{a} = \mathbf{a}_b + \mathbf{a}_{\perp b}$

$$= \underline{\underline{\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right]}}$$

Kryssproduktet i $\mathbb{R}^3$

Vektoren $\mathbb{a} \times \mathbb{b}$ er ortogonal til både $\mathbb{a}$ og $\mathbb{b}$.

Hvorfor? Å være ortogonal betyr at skalarproduktet er 0.
Det vil altså si at $\mathbb{a} \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b})$ og $\mathbb{b} \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b})$.

La $\mathbb{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbb{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\mathbb{a} \times \mathbb{b} = \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

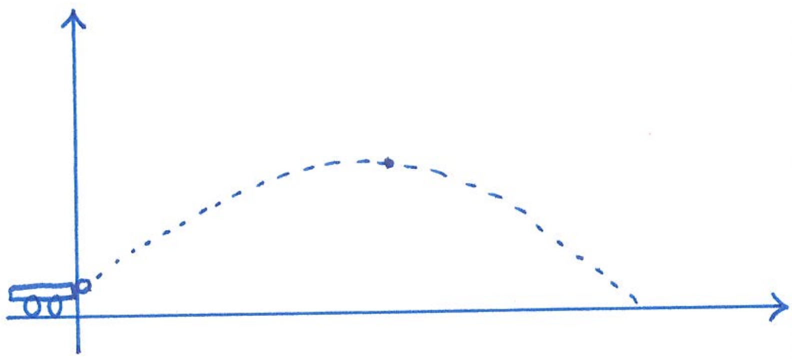
$$\mathbb{a} \cdot (\mathbb{a} \times \mathbb{b}) = (a_1, a_2, a_3)(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= a_1 a_2 b_3 - a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 - a_2 a_1 b_3 + a_3 a_1 b_2 - a_3 a_2 b_1$$

$$= 0$$ ü

Parametriserte kurver

Hvorfor ?



Eks. 2

En kanonkule skytes ut. En parameterfremstilling $(x(t), y(t)$ vil beskrive både høyde og lengde ved hjelp av kun en variabel.

P.S. Alle funksjoner i $\mathbb{R}^2$ kan tenkes på som parameterfremstillinger

$$(t, f(t)).$$

Parametrisering av en rett linje:

En linje l gjennom et punkt $\mathbf{r}_0$, parallell med en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, har parameterfremstilling

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 3

Parametriser linjen gjennom

$(1,0,0)$ og $(1,2,3)$.

Velger $\mathbb{r}_0 = [1,0,0]$.

Vektoren $\mathbb{v} = [1,2,3]-[1,0,0] = [0,2,3]$

er parallell med linjen.

Da har vi

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t) = \mathbb{r}_0 + t\mathbb{v}$$

$$= [1,0,0] + t[0,2,3]$$

$$= [1, 2t, 3t] \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alternativt:

$$x(t) = 1, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = 3t \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Skjæringspunkter mellom parametriserte kurver

Utfordring: Finne skjæring mellom to parametriserte kurver $\mathbb{r}_1(t)$ og $\mathbb{r}_2(t)$.

OBS! Kurvene kan skjære hverandre i forskjellige verdier av t!

Eksempel 4

Finn skjæringspunktene mellom

$\mathbb{r}_1(t) = [1 + \frac{t}{2}, 1 + t]$ og $\mathbb{r}_2(t) = [t^2, t]$.

Siden vi kan ha skjæring for forskjellige verdier av t, velger vi en ny variabel i den ene kurven:

$$\mathbb{r}_1(t) = \mathbb{r}_2(s)$$

$$[1 + \tfrac{t}{2}, 1 + t] = [s^2, s]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{t}{2} = s^2 \\ 1 + t = s \end{array} \right\}$$

$t = s - 1 \Rightarrow \quad 1 + \frac{s-1}{2} = s^2$

$$2 + s - 1 = 2s^2$$

$$2s^2 - s - 1 = 0$$

$$s = 1 \quad \vee \quad s = -1/2$$

$s = 1$ gir $t = s - 1 = 1 - 1 = 0$ $\quad \underline{\underline{(0,1)}}$

$s = -1/2$ gir $t = -1/2 - 1 = -3/2$ $\quad \underline{\underline{(-3/2, -1/2)}}$

Kollisjon : Når kurvene skjærer hverandre ved <u>samme</u> t-verdi :

$\mathbb{r}_1(t) = r_2(t^*)$ for $t = t^*$.

Buelengde

Definisjon: Buelengden til en glatt kurve $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ for $a \le t \le b$ er gitt ved

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |\mathbb{r}'(t)|\, dt \,.$$

Eksempel 5

Finn buelengden til $\mathbb{r} = [e^t \cos t, e^t \sin t]$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\mathbb{r}'(t) = [e^t \cos t + e^t(-\sin t), e^t \sin t + e^t \cos t]$$

$$|\mathbb{r}'(t)| = \sqrt{(e^t\cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2}$$

$$= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{e^{2t} \cdot 2} = \sqrt{2}\, e^t$$